反霍尔德类势的

薛定谔算子

高文华 著

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi + V\Psi$$

天津出版传媒集团

天津科学技术出版社

反霍尔德类势的薛定谔算子

高文华　著

天津出版传媒集团
天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

反霍尔德类势的薛定谔算子/高文华著.—天津:天津科学技术出版社,2013.7

ISBN 978－7－5308－8117－0

Ⅰ.①反… Ⅱ.①高… Ⅲ.①薛定谔方程—算子方程 Ⅳ.①O175.24 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 168148 号

责任编辑:王　祯　冀云燕

责任印制:张军利

天津出版传媒集团

天津科学技术出版社 出版

出版人:蔡　颢

天津市西康路 35 号　邮编 300051

电话(022)23332400

网址:www.tjkjcbs.com.cn

新华书店经销

天津市蓟县宏图印务有限公司印刷

开本 850×1168　1/32　印张 3.5　字数 130 000

2013 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

定价:15.00 元

前　　言

经典调和分析中的很多函数空间以及算子都是相应于拉普拉斯算子$-\Delta$所产生的.例如BMO函数空间和Hardy函数空间$H^p(0<p\leqslant 1)$，其中经典Hardy空间H^p正是由拉普拉斯算子$-\Delta$所决定的算子半群的极大算子在L^p空间中的刻画，而BMO函数空间是H^1的对偶空间.近年，很多学者都在关注具有势函数的薛定谔算子$-\Delta+V$决定的函数空间理论和其算子的理论.这些理论为某些偏微分方程解的适定性研究提供一定的理论基础.作者在前人研究的基础上，主要研究了与具有反霍尔德类势的薛定谔算子相关的几个问题.本书研究了四个问题：①具有反霍尔德类势的薛定谔算子的Riesz变换分别与加权Lipschitz函数和加权BMO函数构成的交换子的加权$L^p(1<p)$的有界性；②与具有反霍尔德类势的薛定谔算子相关的BLO型函数空间BLO_L；③具有反霍尔德类势的抛物型薛定谔算子的某些Riesz变换的L^p有界性；④具有反霍尔德类势的一致抛物型算子解的梯度估计和其决定的几个Riesz变换在加权L^p和Morrey空间上的有界性.

全书共分六章.第一章介绍本书研究的背景，提出研究的问题和意义.第二章介绍反霍尔德类和辅助函数及其性质.第三章运用Störmberg的证明思想，证明了在权函数满足一定条件下，具有反霍尔德类势的薛定谔算子的Riesz变换（$T_1=(-\Delta+V)^{-1}V$，$T_2=(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}$，$T_3=(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla$和$T_4=(-\Delta+V)^{-1}\nabla^2$）分别与加权Lipschitz函数和加权$BMO$函数构成的交换子的加权$L^p$有界性.这些结果蕴含了非加权的情况.第四章给出了与具有反霍尔德类势的薛定谔算子相关的BLO_L空间的定义，得到了BLO_L函数一个等价刻画，其与经典情况是平行的.并研究了具有反霍尔德类势的薛定谔算子的极大Riesz变换从BMO_L到BLO_L的有界性.第五章研究了当$V\in B_q$（q

$\geqslant \frac{n}{2}$)时，具有反霍尔德类势的两个抛物型薛定谔算子的 $L^p(\mathbb{R}^n\times[0,T])$ 和具有反霍尔德类势的一个抛物型薛定谔算子的 $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ 有界性. 第六章研究了当 $a_{i,j}$ 满足一定条件，$V\in B_q$(对某个 $q\geqslant \frac{n}{2}$)，一致抛物型算子 $L=\partial_t-\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{i,j}\partial_j)+V$ 的基本解的梯度估计，算子 VL^{-1}，$V^{\frac{1}{2}}\nabla L^{-1}$，$V^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}$ 的点态估计及其在加权 L^p 空间和 Morrey 空间上的有界性.

由于作者学识水平有限，加之时间仓促，错误在所难免，请读者提出宝贵意见. 这里我要感谢新疆大学江寅生教授，作为他的学生，作者曾得到他很多指导；我还要感谢北京大学唐林副教授，作为他的师弟，作者曾就本书有关问题得到他的指导和帮助；最后，我还要感谢北京师范大学珠海分校，因为本书的出版获得北京师范大学珠海分校 2013 年科研成果出版支持计划的经费资助.

目　　录

第一章　序言

偏微分方程解的适定性的研究是当代数学中心问题之一. 调和分析理论的发展为偏微分方程解的适定性的研究提供了重要理论基础，尤其用调和分析方法研究偏微分方程解的正则性以及先验估计成为现代数学重要方法之一. 自 20 世纪 50 年代 Calderón-Zygmund 提出和发展奇异积分理论以来，关于奇异积分及其在偏微分方程中应用的研究，成为调和分析中最辉煌的成就之一. Calderón-Zygmund 算子[1]的定义如下：

一个从 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$到 $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$的算子称为 Calderón-Zygmund 算子，如果

(a) T 是可延拓成为 $L^2(\mathbb{R}^n)$上有界线性算子；

(b)存在一个核 $K(x,y)$使得对任意 $f\in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \qquad a.e.\{\text{ supp f}\}^c;$$

(c) 该核满足 Calderón-Zygmund 估计式：

$$|K(x,y)|\leqslant\frac{C}{|x-y|^n}, \tag{1.1.1}$$

$$|K(x+h,y)-K(x,y)|\leqslant\frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \tag{1.1.2}$$

$$|K(x,y+h)-K(x,y)|\leqslant\frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \tag{1.1.3}$$

对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|h|<\frac{|x-y|}{2}$,以及某个 $\delta>0$ 成立.

奇异积分交换子更是继奇异积分之后研究偏微分方程解的适定性的另一个重要算子. 由算子 T 和函数 b 组成的交换子定义如下：

$$[b,T]f(x)=b(x)T(f)(x)-T(bf)(x).$$

众所周知，由拉普拉斯算子 $-\Delta$ 决定的 Riesz 变换 $\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$，(−

$\Delta)^{-\frac{1}{2}}\nabla$ 和 $\nabla(-\Delta)^{-1}\nabla$ 都是 Calderón-Zygmund 算子. 根据经典 Calderón-Zygmund 算子理论，这些算子以及它们和 Lipschitz 函数或 BMO 函数生成的交换子都具有 L^p 有界性.

本书主要考虑的具有反霍尔德类势函数 V 的薛定谔算子为

$$\mathrm{L}=-\Delta+V.$$

对于它所决定的 Riesz 变换，B. Helffer 和 J. Nourrigat[2]，H. F. Smith[3] 和 S. Thangavelu[4] 等研究了 $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$，$(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla$，$\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$，$V^{\frac{1}{2}}\nabla(-\Delta+V)^{-1}$ 和 $\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$ 等算子的 L^p 有界性. 特别地，J. Zhong[5] 在他的博士论文中专门研究了具有多项式势的薛定谔算子. 他证明了，当 V 是非负多项式时，$\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$，$\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$ 都是 Calderón-Zygmund 算子，从而它们在 L^p 上是有界的，以及它们分别与 BMO 函数和 Lipschitz 函数的交换子也是在 L^p 上有界的. 后来，Z. Shen[7] 推广了上述结果，他研究了当 V 属于某种反霍尔德类时，包括上述算子的几个由薛定谔算子决定的算子的 L^p 有界性. 这里我们特别指出，反霍尔德类是一类比非负多项式更为广泛的函数类，它包括所有非负多项式以及一些非光滑函数.

众所周知，经典的 Hardy 空间 $H^p(0<p\leqslant 1)$ 是 L^p 空间在 $0<p\leqslant 1$ 范围内适合的替代函数空间. 另一方面，经典的 Hardy 空间 $H^p(0<p\leqslant 1)$ 也是拉普拉斯算子 $-\Delta$ 所产生的算子半群的极大算子在 $L^p(0<p\leqslant 1)$ 空间中的刻画. 自然地，具有势函数的薛定谔算子 $-\Delta+\mathrm{V}$ 是否也有其所产生的算子半群的极大算子在 $L^p(0<p\leqslant 1)$ 空间中刻画的函数空间呢？已经有很多数学家在这方面进行了探索. 其中具有反霍尔德类势的薛定谔算子决定的 Hardy 型空间和其对偶空间有界平均震荡函数空间（BMO 空间）以及一些具有反霍尔德类势的薛定谔算子决定的一些主要算子在这些空间中的性质具有极其重要的价值.

当 $V\in B_{n/2}$，其中 $n\geqslant 3$，Fefferman[48]，Shen[7] 和 Zhong[5] 得到了关于 L 的一些基本结果，并得到 Riesz 变换 $\nabla L^{-1/2}$ 在勒贝格空间 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性，这里 $p\in(1,+\infty)$. Dziubański J. 和 Zienkiewicz

J.[9]原创性地分别以原子形式和由算子半群$\{e^{-tL}\}_{t>0}$或 Riesz 变换$\nabla L^{-1/2}$定义的极大函数刻画了与薛定谔算子 L 相关的 Hardy 空间$H_L^1(\mathbb{R}^n)$. 这个结果被林秦成、刘和平等[20]推广到海森堡群上. Dziubański J. 和 Zienkiewicz J.[9]还通过某种与由势 V 决定的辅助函数相关的某局部极大函数刻画了上述 Hardy 空间 $H_L^1(\mathbb{R}^n)$. 当 $V\in B_{n/2}(\mathbb{R}^n)$,其中 $n\geqslant3$,Dziubański J. 等[12]引入了与 L 相关的 BMO 型空间 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$,并且证明了 $H_L^1(\mathbb{R}^n)$和 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$的对偶性,还得到了 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$关于 Carleson 测度和一些经典算子关于 L 的算子在 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$上的有界性的刻画. 这些算子包括半群极大算子和分数次积分算子 I_α,其中 $\alpha\in(0,n)$. 这些结果也被林秦城和刘和平[20]推广到海森堡群上. 而且,当 $V\in B_n(n\geqslant3)$,董建锋和刘和平[21]进一步建立了算子$\nabla L^{-1/2}$的 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$估计,通过算子$\nabla L^{-1/2}$建立了 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$的 Fefferman-Stein 分解,并且给出 $H_L^1(\mathbb{R}^n)$由$\nabla L^{-1/2}$的共轭算子的一个刻画.

国内数学家颜立新和杨大春等在这方面也取得了出色的成果. 邓东皋,X. T. DUONG,A. SIKORA 和颜立新[19]对更为一般的热核算子所决定的有界平均震荡函数空间(BMO 型空间)与经典的 BMO 空间进行了比较,还进一步给出了应用. 最近,杨大春、杨东勇和周媛[22]引入了由一个允许函数 ρ 所决定的 BMO 型空间 $BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$和 BLO 型空间 $BLO_\rho(\mathbb{R}^n)$,并建立了局部 Riesz 变换在 $BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$上的有界型以及相应的极大算子从 $BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$到 $BLO_\rho(\mathbb{R}^n)$的有界性. 后来,杨大春、杨东勇和周媛[22]又引入了在齐型空间上的 BMO 型空间 $BMO_\rho(X)$和 BLO 型空间 $BLO_\rho(X)$,并建立了它们的一些基本性质. 这些性质包括 $BMO_\rho(X)$上的 John-Nirenberg 不等式和 $BLO_\rho(X)$的几个等价刻画. 他们还得到了自然极大算子,Hardy-Littlewood 极大算子和与 ρ 相关的相应局部算子以及与 ρ 相关的 Littlewood-Paley-g 函数在这些局部空间上的有界性. 当 ρ 取成由反霍尔德类势函数决定的一类辅助函数时,$BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$就是文[12]引入的 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$,而 $BLO_\rho(\mathbb{R}^n)$就是文[12]引入的 $BLO_L(\mathbb{R}^n)$.

下面,我们把与本书内容密切相关的一些他人的研究结果罗列出

来,并根据具体内容提出本书要解决的一些问题. 首先,Z. Shen 在其文[7]中得到的结果具体如下.

定理 A[7] 设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么对于 $1<p\leqslant q$,有

$$\|\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,$$

这里,C_p 只与 p,n 和式(2.1.2)中的常数有关.

定理 B[7] 设 $V\in B_{\frac{n}{2}}$,那么对于 $\gamma\in\mathbb{R}$,$(-\Delta+V)^{i\gamma}$ 是一个 Calderón-Zygmund 算子.

定理 C[7] 设对某个 $n>q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么对于 $1<p\leqslant q_0$,成立

$$\|\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,$$

其中,$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$,$C_p$ 只与 p,n 和式(2.1.2)中的常数有关.

定理 D[7] 设对某个 $n>q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么成立

$$\|(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,\quad p_0{}'\leqslant p<\infty$$

和

$$\|\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,\quad p_0{}'\leqslant p\leqslant p_0,$$

其中,$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$.

定理 E[7] 如果 $V\in B_n$,那么 $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$,$(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla$ 和 $\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$ 都是 Calderón-Zygmund 算子.

定理 F[7] 设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,那么对于 $1<p\leqslant q$,有

$$\|V(-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,$$

这里,C_p 只与 p,n 和式(2.1.2)中的常数有关.

定理 G[7] 设对某个 $q_0\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_{q_0}$,那么对于 $1<p\leqslant p_0$,有

$$\|V^{\frac{1}{2}}\nabla(-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C\|f\|_p,$$

其中,当 $\frac{n}{2}\leqslant q_0<n$ 时,$\frac{1}{p_0}=\frac{3}{2q_0}-\frac{1}{n}$;当 $q_0\geqslant n$ 时,$p_0=2q_0$.

定理 H[7]　设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，那么对于 $1<p\leqslant 2q$，有

$$\| V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}f\|_p\leqslant C\| f\|_p.$$

定理 I[7]　设对某个 $n>q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，那么对于 $p_0{}'<p\leqslant 2q$，有

$$\|(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla f\|_p\leqslant C_p\| f\|_p,\qquad p_0{}'\leqslant p<\infty,$$

其中，$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$. 如果某个 $n\leqslant q$，$V\in B_q$，那么上式对 $1\leqslant p\leqslant 2q$ 成立.

尽管得到如上结果，但是 Shen[7] 并没有回答当 $\frac{n}{2}\leqslant q<n$ 时，L 的 Riesz 变换 $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ 是否是 Calderón-Zygmund 算子. 在 2007 年，郭紫华、李澎涛和彭立中在文[28]中回答了这个问题. 他们研究了 $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$，$V(-\Delta+V)^{-1}$，$V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$ 与 BMO 函数的交换子的 L^p 有界性. 他们指出这几个算子的核并没有 Calderón-Zygmund 核所具有的光滑性，而是具有所谓的 $H(m)$ 条件（见文[28]. 在这种光滑核的条件下，他们证明了如下结果.

定理 J[28]　设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，那么对于 $b\in BMO$，则有

(i) $\|[b,(-\Delta+V)^{-1}V]f\|_p\leqslant C\| b\|_{BMO}\| f\|_p$，$q'\leqslant p<\infty$；

(ii) $\|[b,(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}]f\|_p\leqslant C\| b\|_{BMO}\| f\|_p$，$(2q)'\leqslant p<\infty$；

(iii) $\|[b,(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla]f\|_p\leqslant C\| b\|_{BMO}\| f\|_p$，$p'_0\leqslant p<\infty$，

其中 $\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$；

(iv) $\|[b,(-\Delta+V)^{-1}\nabla^2]f\|_p\leqslant C\| b\|_{BMO}\| f\|_p$，$q'\leqslant p<\infty$.

根据对偶理论，还有如下结论

(v) $\|[b,V(-\Delta+V)^{-1}]f\|_p\leqslant C\| b\|_{BMO}\| f\|_p$，$1<p\leqslant q$；

(vi) $\|[b,V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}]f\|_p\leqslant C\| b\|_{BMO}\| f\|_p$，$1<p\leqslant 2q$；

(vii) $\| [b, \nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}] f \|_p \leqslant C \| b \|_{BMO} \| f \|_p, 1<p\leqslant p_0$,

其中$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$;

(viii) $\| [b, \nabla^2(-\Delta+V)^{-1}] f \|_p \leqslant C \| b \|_{BMO} \| f \|_p, 1<p\leqslant q$.

我们这里指出,当 $V\equiv 0$ 时,$\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ 就是经典的 Calderón-Zygmund 算子. 关于 Calderón-Zygmund 算子交换子,有一个等价刻画是:

设 T 是 Calderón-Zygmund 算子,

$b\in BMO$ 的充分必要条件是交换子$[b,T]$对任意 $p\in(1,+\infty)$在 L^p 上有界(见[30]).

遗憾的是,当 $V\neq 0$ 时,$\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ 并不是经典的 Calderón-Zygmund 算子. 郭紫华、李澎涛和彭立中在文[28]中指出,因为 $V\in B_q, \frac{n}{2}\leqslant q<n$,薛定谔算子$-\Delta+V$ 决定的 Riesz 变换$\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$并非 Calderón-Zygmund 算子. 他们在下面的定理中回答了这个问题.

定理 K[28] 对于 $V\equiv 1$, 存在 $b\notin BMO$,使得$[b, \nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}]$在 L^2 上有界.

设 T 是 Calderón-Zygmund 算子,关于 T 的另一个经典结果是[31]:

$b\in Lip_\beta(0<\beta<1)$的充分必要条件是交换子$[b,T]$从 L^p 到 L^q 上是有界的,其中$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$.

另外,李澎涛和彭立中[29]还研究了这些与薛定谔算子相关的 Reisz 变换的交换子的端点估计.

问题 1:设 V 属于反霍尔德类,那么由薛定谔算子$-\Delta+V$ 决定的 Reisz 变换$\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$,$V(-\Delta+V)^{-1}$,$V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$和$\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$与 Lipschitz 函数 b 的交换子$[b,T]$是否从 L^p 到 L^q 上是有界的

$\left(\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}\right)$?

最近胡蓓和古家军在文[32]中证明了 Calderón-Zygmund 算子相应的加权结果：

如果 T 是一个 Calderón-Zygmund 算子，对于 $\mu\in A_1$，$b\in Lip_{\beta,\mu}$ 当且仅当交换子$[b,T]$是从 $L^p(\mu)$ 到 $L^q(\mu^{1-q})$ 有界的，其中 $1<p<q<\infty$，$0<\beta<1$ 和 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$. 后来，刘宇[69]研究了薛定谔算子$(-\Delta+V)^{-\beta}V^{\alpha}$和$(-\Delta+V)^{-\beta}\nabla V^{\alpha}$与经典 BMO 的交换子在加权 L^p 空间上的有界性.

问题 2：设 V 属于反霍尔德类，那么由薛定谔算子 $-\Delta+V$ 决定的 Reisz 变换 $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$，$V(-\Delta+V)^{-1}$，$V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$ 分别与加权 Lipschitz 函数和加权 BMO 函数 b 的交换子$[b,T]$是否有加权 L^p 的估计.

问题 1 和问题 2 的解决将使得具有反霍尔德类势的薛定谔算子决定的一些算子和更加一般的权函数的交换子在更加广泛的空间的先验估计得到理论证明.

对于经典的 BMO 函数空间，已经有很多优异的结果. 其中，C. Bennett，R. A. DeVore 和 R. Sharpley 在文[33]中指出它的 Hardy-Littlewood 极大函数要么是一致为无穷，要么是从 BMO 到 BMO 的. 对于与薛定谔算子相关的 BMO 型函数空间 BMO_L，也有了一些可喜的结果，比如 J. Dziubaóski，G. Garrigós，T. Martínez 等在文[12][13]中指出薛定谔算子的半群极大算子、Hardy-Littlewood 极大算子和 Poisson 半群极大函数在 BMO_L 空间上都不会为一致无穷，而且是从 BMO_L 到 BMO_L 有界的. 我们这里指出，当 $V\equiv 0$ 时，BMO_L 就是经典的 BMO 空间，那么能够把经典的 BMO 空间的一些结果做到 BMO_L 空间上也是非常有意义的事情.

R. R. Coifman 和 R. Rochberg 在文[34]中研究 BMO 空间的等价刻画时引进了 BMO 空间的一个子空间 BLO，定义如下：

$$BLO=\left\{f\in L_{loc}(\mathbb{R}^n):\frac{1}{|B|}\int_B f(x)-\operatorname*{essinf}_B f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant C\right\}.$$

并且还给出了 BLO 的一个等价刻画：

一个局部可积函数 f 属于 BLO 当且仅当 $f=\alpha\log M^{\#}F+h$，其中 $\alpha>0$，F 是一个局部可积函数且其极大函数 $M^{\#}F$ 是几乎处处有限的，h 是 L^{∞} 函数.

这里，$M^{\#}$ 为自然极大函数，即 $M^{\#}f(x)=\sup\limits_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_{B}f(x)\mathrm{d}x$.

Colin Bennett 还给出了 BLO 的另一个等价刻画：

定理 L[35] 一个局部可积函数 f 属于 BLO 当且仅当存在 $F\in BMO$ 和 $h\in L^{\infty}$，其中 $M^{\#}F(x)$是几乎处处有限的，使得

$$f=M^{\#}F+h,$$

而且

$$\|f\|_{BLO}\sim\inf(\|F\|_{BMO}+\|h\|_{L^{\infty}}),$$

其中下确界是对所有上述表达式的 F 和 h 所取的.

问题 3：是否能够定义一个合适的与薛定谔算子相关的 BLO 型空间 BLO_L 空间，并且有平行于定理 L 的等价刻画.

如果问题 3 得到肯定回答，那么就说明这种与薛定谔算子相关的 BLO 型空间 BLO_L 空间定义相应于经典情况是合理的.

关于经典的 BLO 的估计有如下几个.

Winston Ou 在文[36]中证明了

定理 M[36] 如果存在某一点 $x_0\in\mathbb{R}^n$，使得 $Mf(x_0)<\infty$，那么 $M^{\#}$ 和 M 都是从 BMO 到 BLO 有界的.

设 Ω 是零阶齐次，在单位球 S^{n-1} 上可积，并且具有零平均的函数.定义奇异积分算子

$$T_1f(x)=p.v.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y.$$

相应上述算子的极大算子为

$$T_1^{*}f(x)=\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}\left|\int_{\varepsilon<|x-y|<N}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y\right|.$$

胡国恩和张启慧在文[37]中得到以上极大算子从 BMO 到 BLO 的估计.

定理 N[37] 当对某个 $q>2$，$\Omega\in L(\log L)^q(S^{n-1})$，即，

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(x)| \log^q (2 + |\Omega(x)|) \mathrm{d}x < \infty,$$

并且 Ω 的 L^1 连续模满足：

$$\int_0^1 \omega(\delta) \log \left(2 + \frac{1}{\delta}\right) \frac{d\delta}{\delta} < \infty,$$

这里 $\omega(\delta) = \sup\limits_{|\rho| < \delta} \int_{S^{n-1}} |\Omega(\rho x) - \Omega(x)| \mathrm{d}x$. 那么，如果 $f \in BMO$ 使得对于某个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，$T_1^* f(x_0) < \infty$，就成立

$$\| T_1^* f \|_{BLO} \leqslant C \| f \|_{BMO}.$$

设 T^* 为如下定义的 Calderón-Zygmund 极大奇异积分算子：

$$T^* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y| > \varepsilon} k(x-y) f(y) \mathrm{d}y \right|$$

其中核 $k(x)$ 满足下列标准条件：

(1) $|k(x)| \leqslant C |x|^{-n}, x \neq 0$；

(2) $\int_{R_1 < |x| < R_2} k(x) \mathrm{d}x = 0, 0 < R_1 < R_2 < \infty$；

(3) $|k(x-y) - k(x)| \leqslant \dfrac{|y|}{|x|^{n-1}}, 2|y| \leqslant |x|$.

唐林在文[41]中证明了 Calderón-Zygmund 极大奇异积分算子从 BMO 到 BLO 的估计.

定理 O[41]　如果存在某一点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，使得 $T^* f(x_0) < \infty$，那么

$$\| T^* f \|_{BLO(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \| f \|_{BMO(\mathbb{R}^n)}.$$

董建锋和刘和平在文[21]中研究了薛定谔算子决定的 Riesz 变换和 BMO_L. 得到如下结果.

定理 P[21]　当 $V \in B_n$，薛定谔算子决定的 Riesz 变换 $R_j^L = \dfrac{\partial}{\partial x_j} L^{-\frac{1}{2}}$ 是从 BMO_L 到 BMO_L 有界的，而且成立

$$\| R_j^L f \|_{BMO_L} \leqslant C \| f \|_{BMO_L}.$$

问题 4: 当 $V \in B_n$，薛定谔算子决定的极大 Riesz 变换是否从 BMO_L 到 BLO_L 有界.

由于 $BLO_L \subsetneqq BLO$，问题 4 的解决表明薛定谔算子决定的极大 Riesz 变换有更好的性质，使得它有更加广泛的应用范围.

对于椭圆型的薛定谔算子$-\Delta+V$，相应有抛物型薛定谔算子$\partial_t-\Delta+V$. $\partial_t-\Delta+V$所在的底空间是具有抛物度量的空间$\mathbb{R}^{n+1}$或者$\mathbb{R}^n\times[0,T]$. 其中的度量为：

$$\rho((x,t),(y,s))=\max\{|x-y|,|t-s|^{\frac{1}{2}}\},$$
$$(x,t),(y,s)\in\mathbb{R}^{n+1}(\mathbb{R}^n\times[0,T]).$$

把椭圆型的薛定谔算子的相关问题做到相应的抛物型薛定谔算子上是有意义的事情. 最近，韩金晟和唐林在文[39]中考虑了一些抛物型薛定谔算子在底空间$(\mathbb{R}^{n+1},\rho)$上的$L^p(\mathbb{R}^{n+1})$估计.

定理 Q[39] 设对某个$q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，那么对于$1<p\leqslant q$，成立

$$\|\nabla^2(\partial_t-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C\|f\|_p.$$

定理 R[39] 设对某个$q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，那么对于$1<p\leqslant\infty$，$\gamma\in\mathbb{R}$，成立

$$\|(\partial_t-\Delta+V)^{i\gamma}f\|_p\leqslant C\|f\|_p.$$

定理 S[39] 设对某个$n>q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，那么对于$1<p\leqslant p_0$，成立

$$\|\nabla(\partial_t-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}f\|_p\leqslant C\|f\|_p,$$

其中，$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$.

定理 T[39] 设对某个$q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，那么对于$1<p\leqslant q$，成立

$$\|V(\partial_t-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C\|f\|_p.$$

定理 U[39] 设对某个$q_0\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_{q_0}$，那么对于$1<p\leqslant p_0$，成立

$$\|V^{\frac{1}{2}}\nabla(\partial_t-\Delta+V)^{-1}f\|_p\leqslant C\|f\|_p,$$

其中，当$\frac{n}{2}\leqslant q_0<n$时，$\frac{1}{p_0}=\frac{3}{q_0}-\frac{1}{n}$；当$q_0\geqslant n$时，$p_0=2q_0$.

问题 5：是否有相应于定理 H 的抛物型的结果呢？即$V^{\frac{1}{2}}(\partial_t-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$是否在$L^p(\mathbb{R}^{n+1})$上有界呢？

问题 6：对于另一类抛物型空间$(\mathbb{R}^n\times[0,T],\rho)$，抛物型 Reizs 变

换$\nabla^2(\partial_t-\Delta+V)^{-1}$和$V(\partial_t-\Delta+V)^{-1}$是否也具有$L^p$有界性呢?

对于问题5和问题6,我们在第五章给予肯定详细的回答.

以具有反霍尔德类势的薛定谔算子为特殊情况的具有反霍尔德类势的一致椭圆算子的研究也引起一些作者的注意.设

$$L_1=-\sum_{i,j=}^{n}\partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j)+V.$$

其中,$V\in B_q\left(q\geqslant\frac{n}{2}\right)$,$a_{i,j}(x)(i,j=1,2,\cdots,n)$是满足下列条件的可测函数.

(A01):存在常数$\lambda\in(0,1]$,使得

$$a_{i,j}(x)=a_{j,i}(x),\lambda|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\lambda^{-1}|\xi|^2,(x,\xi\in\mathbb{R}^n);$$

(A02):存在常数$\alpha\in(0,1]$和$K>0$,使得

$$\|a_{i,j}\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}\leqslant K.$$

K. Kurata 和 S. Sugano 在文[42]中得到了L_1的基本解的点态估计和基本解梯度的点态估计,进一步证明了$T_1=VL_1^{-1}$,$T_2=V^{\frac{1}{2}}\nabla L_1^{-1}$和$T_3=\nabla^2L_1^{-1}$在加权$L^p$和Morrey空间上的有界性.

定理 V[42] 对T_1,假设$A(x)$满足**(A01)**条件,对T_2,$A(x)$满足**(A01)**—**(A02)**条件,并且$V\in B_\infty$,则存在正常数$C_k(k=1,2)$,使得

$$|T_kf(x)|\leqslant C_kM(|f|)(x),(f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),k=1,2),$$

其中$M(f)$是Hardy-Littlewood极大函数.

记T_1^*和T_2^*分别为T_1和T_2的共轭算子.

定理 W[42] (1)假设$A(x)$满足**(A01)**条件,$V\in B_q$,$q>\frac{n}{2}$,则存在常数C使得

$$|T_1^*f(x)|\leqslant CM(|f|^{q'})^{\frac{1}{q'}}(x)\qquad(f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)),$$

其中,$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$.

(2)假设$A(x)$满足**(A01)**—**(A02)**条件.当$V\in B_q$,$\frac{n}{2}<q<n$,有

$$|T_2^*f(x)|\leqslant CM(|f|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}(x)\qquad(f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)),$$

其中，$\frac{1}{p_1}=1+\frac{1}{n}-\frac{3}{2q}$. 当 $V\in B_q, n\leqslant q$，有

$$|T_2^* f(x)|\leqslant CM(|f|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}(x)\qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)),$$

其中，$\frac{1}{p_1}=1-\frac{1}{2q}$.

朱月萍[43]得到了 $V^{\frac{1}{2}}L_1^{-\frac{1}{2}}$ 在加权 L^p 空间上的有界性.

定理 X[43] 假设 $A(x)$ 满足(A01)－(A02)条件，当 $V\in B_\infty$，则存在常数 $C>0$ 使得

$$|V(x)^{\frac{1}{2}}L_1^{-\frac{1}{2}}f(x)|\leqslant CM(f)(x)\qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

当 $V\in B_q, \frac{n}{2}\leqslant q<\infty$，则对 $1<p\leqslant 2q$，

$$\| V^{\frac{1}{2}}L_1^{-\frac{1}{2}}f\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\| f\|_{L^p(\omega)},$$

这里 $\omega^{1-p'}\in A_{\frac{p'}{(2q)'}}$.

对应于 L_1 的具有反霍尔德类势的一致抛物型算子为：

$$L=L_0+V=\partial_t-\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{i,j}(x',t)\partial_j)+V(x'),$$

其中，$V\in B_q$，$a_{i,j}(x',t)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都是可测函数，它们满足下面条件：

(A1)：存在常数 $\lambda\in(0,1]$，使得

$$a_{i,j}(x',t)=a_{j,i}(x',t),$$

$$\lambda|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x',t)\xi_i\cdot\xi_j\leqslant\lambda^{-1}|\xi|^2,$$

$$((x',t)\in\mathbb{R}^{n+1}, \xi\in\mathbb{R}^n).$$

(A2)：存在常数 $\alpha\in(0,1]$ 和 $K>0$，使得

$$\| a_{i,j}\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^{n+1})}\leqslant K.$$

我们记 $A(x',t)$ 为由 $(a_{i,j}(x',t))$ 组成的矩阵. 如果 $A(x',t)$ 满足条件(A1)，我们称 L 满足一致抛物条件.

显然当 $A(x',t)$ 为单位矩阵时，该一致抛物型算子 L 就是前面的抛物型薛定谔算子.

K. Kurata 在文[44]中研究了 L 的基本解的估计：

定理 Y[44]　设 $V\in B_{\frac{n}{2}}$，$A(x',t)$满足条件(A1)－(A2)，存在正常数 $C_j(j=0,1,2)$，使得对任意 $x',y'\in\mathbb{R}^n$ 和 $t>s$，成立

$$(0\leqslant)\Gamma(x',t;y',s)\leqslant C_1\exp(-C_2(1+m(x',V)^2(t-s))^{\frac{1}{2(k_0+1)}}\frac{e^{-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}}}{(t-s)^{\frac{n}{2}}},$$

其中 $\Gamma(x',t;y',s)$是 L 的基本解.

一个自然的有意义的问题是：

问题 7：一致抛物型算子 L 的基本解的梯度是否具有相应于椭圆情况的估计？

如果有，那么将对一些算子的估计解决关键问题.

问题 8：定理 W，X，Y 和它们的推论是否可以做到一致抛物型算子 L 上？问题 7 的解决将使得一类抛物型算子的先验估计得到证明.

以上问题我们将在后面的第六章一一给予解决，得到一些相应的定理.

第二章　反霍尔德类与辅助函数

§2.1　反霍尔德类

反霍尔德类是一类重要的函数类.作为偏微分方程的势函数,它有更加广泛的意义.同时,反霍尔德函数类具有比较好的性质.这些性质无论是在研究具有反霍尔德类势微分算子决定的函数空间,还是在研究具有反霍尔德类势微分算子在函数空间中的性质,都起到关键的作用.在文[45]和[46]中,其作者定义了反霍尔德函数类,这里陈述如下.

定义 2.1.1[45]　设 $V(x)\geqslant 0$.

(a)当 $1<q<\infty$ 时,我们称 $V(x)$ 属于反霍尔德类 B_q,如果 $V\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$,并且存在常数 $C>0$,使得

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(x)^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(x)\,\mathrm{d}x\right), \tag{2.1.1}$$

对任意球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 都成立.

(b)我们称 $V\in B_\infty$,如果 $V\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$,并且存在常数 $C>0$ 使得

$$\|V\|_{L^\infty(B)}\leqslant C\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

对任意球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 都成立.

反霍尔德类的性质是研究下面具有反霍尔德类势的各种微分算子的基础.下面给出一些反霍尔德类的性质.

性质一　若 $1<q_1<q_2<\infty$,则 $B_\infty\subset B_{q_2}\subset B_{q_1}$.

证明:性质一由下列霍尔德不等式显然可以得到.

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(x)^{q_1}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_1}}\leqslant\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(x)^{q_2}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q_2}}\leqslant C\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

由定义 2.1.1 可以直接得到反霍尔德类有一个很好的性质[45].

性质二　设 $V\in B_q, q>1$, 则存在 $\epsilon>0$,使得 $V\in B_{q+\epsilon}$.

性质三　若 $V\in B_q, q\geqslant 1$,则 $V(x)\mathrm{d}x$ 是一个双倍测度,即 $\forall r>0$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$,存在 C_0 使得成立

$$\int_{B(x,2r)} V(y)\mathrm{d}y\leqslant C_0\int_{B(x,r)} V(y)\mathrm{d}y. \tag{2.1.2}$$

事实上,$V\in B_q, q\geqslant 1$,则 V 是一个 MuckenhouptA_∞ 权函数.由 A_∞ 权函数的性质可知(2.1.2)式成立.

性质四　设 $P(x)$是一个多项式,那么 $V(x)=|P(x)|^\alpha(\alpha>0)$属于 B_∞.

性质五　如果 $V_1, V_2\in B_{2q}$,则 $V_1V_2\in B_q$.对任意 $\alpha>0$,有 $W=V^\alpha\in B_\infty$.由性质五,对任意多项式 P_i, Q_i 和 $\alpha_i, \beta_i>0$, 有 $V=\sum_{i=1}^m |P_i|^{\alpha_i}|Q_i|^{\beta_i}\in B_\infty$.

该性质说明反霍尔德类包含了所有非负多项式.正是由于这个原因,原来很多关注多项式势函数的薛定谔方程问题的学者转向关注反霍尔德势函数的薛定谔方程问题.

性质六　设 $V(x)\in B_q(1<q\leqslant\infty)$,$\lambda>0$ 是一常数,则 $V(x)+\lambda\in B_q$.

证明:对于任何球 $B\subset\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|B|}\int_B(V(y)+\lambda)^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} &\leqslant \left(\frac{1}{|B|}\int_B(V(y))^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}+\\ &\quad\left(\frac{1}{|B|}\int_B\lambda^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leqslant C\,\frac{1}{|B|}\int_B V(y)\mathrm{d}y+\lambda\\ &=\frac{C}{|B|}\int_B(V(y)+\lambda)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

性质七　设 $V\in B_q, 0<r<R<+\infty$,则存在 $C>0$ 使得

$$\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)} V(y)\mathrm{d}y\leqslant C\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}-2}\frac{1}{R^{n-2}}\int_{B(x,R)} V(y)\mathrm{d}y. \tag{2.1.3}$$

证明:由于 $V\in B_q$,根据霍尔德不等式

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}V(y)\mathrm{d}y\leqslant\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}V^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant\frac{R}{r}^{\frac{n}{q}-2}\left(\frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)}V^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant C\ \frac{R}{r}^{\frac{n}{q}-2}\ \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)}V(y)\mathrm{d}y.$$

根据性质七和 $q\geqslant\frac{n}{2}$ 的假设,容易得到下面的性质.

性质八 设 $V\in B_q,q\geqslant\frac{n}{2}$.对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$,有

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)}V(y)\mathrm{d}y=0;\qquad \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)}V(y)\mathrm{d}y=\infty.$$

性质九 设 $V\in B_q,q\geqslant\frac{n}{2}$,则

$$\int_{B(x,R)}\frac{V(y)}{|x-y|^{n-2}}\mathrm{d}y\leqslant\frac{C}{R^{n-2}}\int_{B(x,R)}V(y)\mathrm{d}y. \tag{2.1.4}$$

运用反霍尔德不等式和 B_q 条件,我们容易得到性质九.

如果 $V\in B_n$,则存在 $\epsilon>0$,使得 $V\in B_{n+\epsilon}$,从而有

$$\int_{B(x,R)}\frac{V(y)}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y\leqslant\frac{C}{R^{n-1}}\int_{B(x,R)}V(y)\mathrm{d}y. \tag{2.1.5}$$

§2.2 辅助函数及其性质

文[47]中引入的辅助函数及其性质在本论文中的大部分问题讨论中起到了关键的作用.

定义 2.2.1[47] 设 $x\in\mathbb{R}^n$,辅助函数 $m(x,V)$ 定义如下:

$$\frac{1}{m(x,V)}=\sup_{r>0}\{r:\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)}V(y)\mathrm{d}y\leqslant1\}.$$

除了上一节所叙述的反霍尔德类的性质,这里列出当 $V\in B_q$ 时,辅助函数 $m(x,V)$ 的一些有用的性质(见[7],[38],[43],[44]):

性质一　设 $V\in B_q, q>\frac{n}{2}$，那么 $0<m(x,V)<\infty$.

性质二　设 $V\in B_q, q>\frac{n}{2}$，且 $h=\frac{1}{m(x,V)}$，则 $\frac{1}{h^{n-2}}\int_{B(x,h)}V(y)\mathrm{d}y=1$.

性质三　设 $V\in B_q, q>\frac{n}{2}$，$|x-y|\leqslant C\frac{1}{m(x,V)}$，则 $m(x,V)\sim m(y,V)$.

证明：设 $r=\frac{1}{m(x,V)}$，假设 $|x-y|\leqslant Cr$. 由于 $V(x)\mathrm{d}x$ 是一个双倍测度，

$$\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(y,r)}V(z)\mathrm{d}z\sim\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)}V(z)\mathrm{d}z=1.$$

由此推出

$$m(y,V)\sim\frac{1}{r}=m(x,V).$$

性质四　设 $V\in B_q, q>\frac{n}{2}$，则存在 $C>0, k_0>0$ 使得

$$m(y,V)\leqslant C\{1+|x-y|m(x,V)\}^{k_0}m(x,V). \tag{2.2.1}$$

证明. 假设 $|x-y|\sim 2^j r, j\geqslant 1$. 设 $0<r_1<r$ 和 $2^k r_1\sim 2^j r$. 则根据式(2.1.2)和(2.1.3)有

$$\begin{aligned}\int_{B(y,r_1)}V(z)\mathrm{d}z&\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}\int_{B(y,2^k r_1)}V(z)\mathrm{d}z\\&\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}\int_{B(y,2^j r)}V(z)\mathrm{d}z\\&\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}C_0^j\int_{B(x,r)}V(z)\mathrm{d}z\\&=C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}C_0^j r^{n-2}.\end{aligned}$$

这里 C_0 是式(2.1.2)中的常数. 于是当 $r_1\leqslant C_1^{-j}r$，且 C_1 足够大时，

$$\frac{1}{r_1^{n-2}}\int_{B(y,r_1)}V(z)\mathrm{d}z\leqslant C(2^{\frac{n}{q}-n}C_0)^j\frac{r^{\frac{n}{q}-2}}{r_1}\leqslant\frac{1}{2}.$$

因此根据定义 2.2.1，

$$\frac{1}{m(y,V)}\geqslant C_1^{-j}r.$$

取 $k_0=\log_2 C_1$ 时，由此推得

$$m(y,V)\leqslant C_1^j m(x,V)\leqslant C\{1+|x-y|m(x,V)\}^{k_0} m(x,V).$$

性质五 设 $V\in B_q, q>\frac{n}{2}$，则存在 $C>0, k_0>0$ 使得

$$m(y,V)\geqslant\frac{Cm(x,V)}{\{1+|x-y|m(x,V)\}^{\frac{k_0}{k_0+1}}}. \tag{2.2.2}$$

证明：我们可以假设

$$|x-y|\geqslant\frac{1}{m(y,V)},$$

因为如果不是，很容易根据性质三再得到这个结果. 根据性质四，我们有

$$m(x,V)\leqslant C\{1+|x-y|m(y,V)\}^{k_0} m(y,V)\leqslant C|x-y|^{k_0} m(y,V)^{k_0+1}.$$

于是

$$m(y,V)\geqslant\frac{cm(x,V)^{1/(k_0+1)}}{|x-y|^{k_0/(k_0+1)}}\geqslant\frac{cm(x,V)}{\{1+m(x,V)|x-y|\}^{k_0/(k_0+1)}}.$$

这样就完成了证明.

运用性质三、四和五，容易得到：

性质六 设 $V\in B_q, q>\frac{n}{2}$，则存在 $C>0, c>0, k_0>0$ 使得

$$\begin{aligned} c(1+|x-y|m(y,V))^{\frac{1}{(k_0+1)}}&\leqslant 1+|x-y|m(x,V)\\ &\leqslant C(1+|x-y|m(y,V))^{k_0+1}. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

性质七 设 $V\in B_q, q>\frac{n}{2}$. 若 $Rm(x,V)\geqslant 1$，则

$$\frac{1}{R^{n-2}}\int_{B(x,R)}V(y)\,\mathrm{d}y\leqslant C\{Rm(x,V)\}^{k_0}. \tag{2.2.4}$$

证明：设 $r=\frac{1}{m(x,V)}$. 假定 $2^j r\leqslant R\leqslant 2^{j+1}r, j\geqslant 0$. 那么根据双倍条件(2.1.2)

$$\int_{B(x,R)}V(y)\,\mathrm{d}y\leqslant C_0^{j+1}\int_{B(x,r)}V(y)\,\mathrm{d}y\leqslant C_0^{j+1}r^{n-2}.$$

由此推出

$$\frac{1}{R^{n-2}}\int_{B(x,R)}V(y)\,\mathrm{d}y\leqslant\leqslant C_0^{j+1}\frac{r}{R}^{n-2}\leqslant C_0(C_0 2^{2-n})^j$$
$$\leqslant C(Rm(x,V))^{k_0}.$$

其中取 $k_0=\log_2 C_0+2-n$.

性质八　设 $V,U\in B_q(1<q\leqslant\infty)$，则 $V+U\in B_q$. 而且当 $V\in B_q(q\geqslant\frac{n}{2})$，$\lambda>0$，$m(x,V)\leqslant m(x,V+\lambda)$.

性质八可以由闵可夫斯基不等式和下面的事实容易得到.

$$\{r>0:\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)}(V(y)+\lambda)\,\mathrm{d}y\leqslant 1\}\subseteq\{r>0:\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)}V(y)\,\mathrm{d}y\leqslant 1\}.$$

性质九　$V\in B_\infty$ 蕴含 $V(x)\leqslant Cm(x,V)^2$；对任意常数 $\lambda>0$，$m(x,\lambda)=C\lambda^{\frac{1}{2}}$.

性质十　如果存在常数 $K_1,K_2>0$，使得 $K_1U_1(x)\leqslant U_2(x)\leqslant K_2U_2(x)$，那么存在常数 $K_1',K_2'>0$，使得 $K_1'm(x,U_1)\leqslant m(x,U_2)\leqslant K_2'm(x,U_1)$.

第三章　薛定谔算子的 Riesz 变换的交换子的加权 L^p 估计

§3.1　引言

设 $L=-\Delta+V(x)$ 是在 $\mathbb{R}^n(n\geqslant3)$ 上的薛定谔算子. 我们假设 $V(x)$ 是一个非零非负的势函数,并且满足对于某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$,属于反霍尔德类 B_q. 为了方便起见,本章我们记 $T_j(j=1,2,3,4)$ 是由 L 决定的 Riesz 变换,即 $T_1=(-\Delta+V)^{-1}V$, $T_2=(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}$, $T_3=(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla$ 和 $T_4=(-\Delta+V)^{-1}\nabla^2$. J. Zhong (见[28])证明了,如果 V 是一个非负多项式, $\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$, $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$ 是 Calderón-Zygmund 算子. Z. Shen 推广了这些结果(见[7]). 他证明了如果 V 属于反霍尔德类 B_n, $\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$, $(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}\nabla$ 和 $\nabla(-\Delta+V)^{-1}\nabla$ 都是 Calderón-Zygmund 算子. 反霍尔德类包含了非负多项式和一些非光滑函数. 另外,Z. Shen 也证明了当 $V\in B_{\frac{n}{2}}$,算子 T_1, T_2, T_3 和 T_4 在 L^p 上有界,见第一章中的定理 A-I. 最近,郭紫华、李澎涛和彭立中(见[7])证明了,当 $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$, 交换子 $[b,T_j](j=1,2,3,4)$ 是 L^p 有界的,见第一章中的定理 J. 本章我们将讨论当 b 分别是 Lipschitz 函数和加权 Lipschitz 函数,交换子 $[b,T_j](j=1,2,3,4)$ 的 L^p 有界性和加权 $L^p(\mu)$ 有界性,以及当 b 是加权 BMO 函数,交换子 $[b,T_j](j=1,2,3,4)$ 的加权 $L^p(\mu)$ 有界性.

Z. Shen 已经证明了当 $V\in B_n$ 时, T_3 是一个 Calderón-Zygmund 算子(见[7]). 根据 M. Paluszyóski 在文[31]中的经典结果:

如果 T 是一个 Calderón-Zygmund 算子, $b\in Lip_\beta(0<\beta<1)$ 当且

仅当交换子$[b,T]$是从 L^p 到 L^q 有界的，其中 $1<p<q<\infty$，$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$.

可知，当 $V\in B_n$，$b\in Lip_\beta(0<\beta<1)$时，$[b,T_3]$是从 L^p 到 L^q 有界的，其中 $1<p<q<\infty$，$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$.

最近胡蓓和古家军在文[32]中证明了相应的加权结果：

如果 T 是一个 Calderón-Zygmund 算子，对于 $\mu\in A_1$，$b\in Lip_{\beta,\mu}$当且仅当交换子$[b,T]$是从 $L^p(\mu)$ 到 $L^q(\mu^{1-q})$ 有界的，其中 $1<p<q<\infty$，$0<\beta<1$ 和$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$.

所以当 $V\in B_n$，$\mu\in A_1$，$b\in Lip_{\beta,\mu}$时，$[b,T_3]$是从 $L^p(\mu)$ 到 $L^q(\mu^{1-q})$ 有界的，其中 $1<p<q<\infty$，$0<\beta<1$ 和$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$. 然而，在文[28]中，作者们指明这些核因为势函数 $V\in B_q(\frac{n}{2}\leqslant q<n)$不具有 Calderón-Zygmund 核的光滑性(见定理 K)，同时发现这些核具有另外较弱的光滑性. 如下：

定义 3.1.1[28]　我们称 $K(x,y)$是对某个 $m\geqslant 1$ 满足条件 $H(m)$，如果存在常数 $C\geqslant 0$，使得$\forall\, l>0$，$x,x_0\in\mathbb{R}^n$，其中$|x-x_0|\leqslant l$，有下面不等式成立，

$$\sum_{k=5}^{\infty} k(2^k l)^{\frac{n}{m'}}\left\{\int_{2^k l\leqslant|y-x_0|<2^{k+1}l}|K(x,y)-K(x_0,y)|^m\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{m}}<C,$$

这里$\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}=1$.

容易看到，如果 $K(x,y)$是一个 Calderón-Zygmund 核，那么 $K(x,y)$满足 $H(m)$，$\forall\, m\geqslant 1$. 在文[28]中，郭紫华、李澎涛和彭立中已经证明 $T_j(j=1,2,3)$的核分别对不同范围的 m 满足 $H(m)$条件. 即 T_1 的核 K_1满足 $H(q)$条件，T_2的核 K_2满足 $H(2q)$条件，T_3的核 K_3满足 $H(p_0)$条件.

为了证明我们的结果,需要给出 Hardy-Littlewood 极大函数、分数次 Hardy-Littlewood 极大函数、Sharp 极大函数的记号. 它们分别是:

Hardy-Littlewood 极大函数定义为:

$$Mf(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y.$$

Sharp 极大函数定义为:

$$M^{\#}f(x)=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)-f_B|\mathrm{d}y\approx\sup_{B\ni x}\inf_{C}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)-C|\mathrm{d}y,$$

其中 $f_B=\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\mathrm{d}y$,上确界是对所有的球 $B(\ni x)\subset\mathbb{R}^n$ 取的.

分数次 Hardy-Littlewood 极大函数的定义为:

$$M_{\beta,r}f(x)=\sup_{B\ni x}\left\{\frac{1}{|B|^{1-\frac{r\beta}{n}}}\int_B|f(y)|^r\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{r}},$$

其中 $0<r<\frac{n}{\beta}$,上确界是对所有的球 $B(\ni x)\subset\mathbb{R}^n$ 取的.

我们记 $f(x)$ 的分数次加权极大函数为

$$M_{\beta,\mu,r}f(x)=\sup_{B\ni x}\left\{\frac{1}{\mu(B)^{1-\frac{r\beta}{n}}}\int_B|f(y)|^r\mu(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{r}},0<r<\frac{n}{\beta}.$$

下面我们给出 Lipschitz 函数和加权 Lipschitz 函数的定义及其性质.

定义 3.1.2 我们称一个局部可积函数 $f(x)$ 属于 Lip_β^p,其中 $1\leqslant p\leqslant\infty(0<\beta<1)$, 如果

$$\sup_B\frac{1}{|B|^{\frac{\beta}{n}}}\left\{\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)-f_B|^p\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant C<\infty,$$

这里上确界是对所有球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 取的. 我们称上式的最小常数 C 为 f 的范数,记为 $\|f\|_{Lip_\beta^p}$.

定义 3.1.3 设 $1\leqslant p<\infty,0<\beta<1$ 以及 $\mu\in A_\infty(\mathbb{R}^n)$,我们称一个局部可积函数 $f(x)$ 属于加权 $Lip_{\beta,\mu}^p$, 如果

$$\sup_B \frac{1}{\mu(B)^{\frac{\beta}{n}}}\left\{\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(y)-f_B|^p \mu(y)^{1-p}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C<\infty,$$

其中上确界对所有球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 成立.

这类函数的全体记为 $Lip_{\beta,\mu}^p$. 它是一个 Banach 空间. 满足上述条件的最小的常数 C 为 f 在这个空间的范数,记为 $\|f\|_{Lip_{\beta,\mu}^p}$. 令 $Lip_{\beta,\mu}=Lip_{\beta,\mu}^1$. 显然,当 $\mu=1$ 时,$Lip_{\beta,\mu}$空间就是经典的 Lip_β空间.

关于 $Lip_{\beta,\mu}^p$的两个性质如下:(见[57])

$$\mu\in A_1,\qquad \|f\|_{Lip_{\beta,\mu}^p}\sim\|f\|_{Lip_{\beta,\mu}},\qquad \forall\, p>1.\tag{3.1.1}$$

我们记 2^kB 为球 B 的同心 2^k倍扩张,那么

$$|f_{2^kB}-f_B|\leqslant C(k+1)\mu(B)^{\frac{\beta}{n}}\|f\|_{Lip_{\beta,\mu}}.\tag{3.1.2}$$

下面我们给出加权 BMO 函数的定义及其性质.

定义 3.1.4　设 $1\leqslant p<\infty$, 以及 $\mu\in A_\infty(\mathbb{R}^n)$,我们称一个局部可积函数 $f(x)$属于加权 BMO_μ^p, 如果

$$\sup_B\left\{\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(y)-f_B|^p\mu(y)^{1-p}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant C<\infty,$$

其中上确界对所有球 $B\subset\mathbb{R}^n$成立.

这类函数的全体记为 BMO_μ^p. 它也是一个 Banach 空间. 满足上述条件的最小的常数 C 为 f 在这个空间的范数,记为 $\|f\|_{BMO_\mu^p}$. 令 $BMO_\mu=BMO_\mu^1$. 显然,当 $\mu=1$ 时, BMO_μ空间就是经典的 BMO 空间.

关于 BMO_μ^p的两个性质如下:(见[57])

$$\mu\in A_1,\quad \|f\|_{BMO_\mu^p}\sim\|f\|_{BMO_\mu},\quad \forall\, p>1.\tag{3.1.3}$$

我们记 2^kB 为球 B 的同心 2^k倍扩张,那么

$$|f_{2^kB}-f_B|\leqslant C(k+1)\|f\|_{BMO_\mu}.\tag{3.1.4}$$

§2.2　薛定谔算子的 Riesz 变换和利普希茨函数的交换子的加权 L^p 估计

我们的第一个主要定理是:

定理 3.2.1　假设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$. 设 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$，其中 $0<\beta<1$ 以及 $1<p<r<\infty$. 若 $b\in Lip_\beta$，那么成立

(i) $q'\leqslant p<\infty$，$\|[b,T_1]f\|_{L^r}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_\beta}\|f\|_{L^p}$；

(ii) $(2q)'\leqslant p<\infty$，$\|[b,T_2]f\|_{L^r}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_\beta}\|f\|_{L^p}$；

(iii) $p'_0\leqslant p<\infty$，$\|[b,T_3]f\|_{L^r}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_\beta}\|f\|_{L^p}$，

其中 $\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$.

我们知道 $T_1^*=V(-\Delta+V)^{-1}$，$T_2^*=V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$，$T_3^*=-\nabla(-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}$. 根据对偶理论，我们容易得到：

$\|[b,T_1^*]f\|_{L^r}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_\beta}\|f\|_{L^p}$，$1<p\leqslant q$；

$\|[b,T_2^*]f\|_{L^r}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_\beta}\|f\|_{L^p}$，$1<p\leqslant 2q$；

$\|[b,T_3^*]f\|_{L^r}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_\beta}\|f\|_{L^p}$，$1<p\leqslant p_0$，

其中 $\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$.

第二个主要定理是关于 $b\in Lips_{\beta,\mu}$ 的加权结果：

定理 3.2.2　假设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，其中 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$，$0<\beta<1$ 以及 $1<p<r<\infty$. 设 $\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)\cap B_{\epsilon_0}$，其中 $\epsilon_0=\frac{(s_1-1)m'}{s_1-m'}$，$m'<s_1<s<\infty$，而且满足 $\mu^{1-p}\in A_{\frac{p}{m}}$. 对于下面的(i)，(ii)和(iii)，$m$ 分别取 q，$2q$ 和 p_0. 那么对任意 $b\in Lip_{\beta,\mu}$，有下面估计成立

(i) $q'\leqslant p<\infty$，$\|[b,T_1]f\|_{L^r(\mu^{1-r})}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}\|f\|_{L^p(\mu)}$；

(ii) $(2q)'\leqslant p<\infty$，$\|[b,T_2]f\|_{L^r(\mu^{1-r})}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}\|f\|_{L^p(\mu)}$；

(iii) $p'_0\leqslant p<\infty$，$\|[b,T_3]f\|_{L^r(\mu^{1-r})}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}\|f\|_{L^p(\mu)}$，

其中 $\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$.

根据对偶理论，因为 $L^p(\mu)$ 和 $L^{p'}(\mu^{1-p'})$ 互为对偶空间，我们容易得到

$$\|[b,T_1^*]f\|_{L^r(\mu^{1-r})}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}\|f\|_{L^p(\mu)},\qquad 1<p\leqslant q;$$
$$\|[b,T_2^*]f\|_{L^r(\mu^{1-r})}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}\|f\|_{L^p(\mu)},\qquad 1<p\leqslant 2q;$$
$$\|[b,T_3^*]f\|_{L^r(\mu^{1-r})}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}\|f\|_{L^p(\mu)},\qquad 1<p\leqslant p_0,$$

其中$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$.

定理 3.2.1 和定理 3.2.2 的证明主要依靠下面的命题 3.2.1 和命题 3.2.2. 我们首先考虑一般算子 $Tf(x)=\int K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$，然后再具体到 $T_j(j=1,2,3)$.

命题 3.2.1　设 $m>1,\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n},0<\beta<1$ 以及 $m'<p<r<\infty$. 假设 T 在 L^p 空间上是有界的，并且 T 的核 K 满足 $H(m)$ 条件. 那么 $\forall b\in Lip_\beta,\forall p\in(m',\infty)$，$[b,T]$是从 L^p 到 L^r 有界的，而且有

$$\|[b,T]f\|_{L^r}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_\beta}\|f\|_{L^p}.$$

命题 3.2.2　设 $m>1,\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n},0<\beta<1$，以及 $m'<p<r<\infty$. 假定 $\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)\cap B_{\epsilon_0},\epsilon_0=\frac{(s_1-1)m'}{s_1-m'}$，其中 $m'<s_1<s<\frac{n}{\beta}$. 假设 T 在 $L^p(\mu^{1-p})$上是有界的，而且 T 的核 K 满足 $H(m)$条件. 那么 $\forall b\in Lip_{\beta,\mu},\forall p\in(m',\infty)$，$[b,T]$ 是从 $L^p(\mu)$ 到 $L^r(\mu^{1-r})$ 有界的，而且有

$$\|[b,T]f\|_{L^r(\mu^{1-r})}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}\|f\|_{L^p(\mu)}.$$

注 3.2.1　命题 3.2.1 是加权情况的命题 3.2.2 当 $\mu\equiv 1$ 的特例，尽管命题 3.2.2 可以用来证明定理 3.2.2，但是它具有一定的独立意义，因为它对权函数的要求相对定理 3.2.2 中对权函数的要求比较低.

我们采取 Störmberg 的思想来证明命题 3.2.2. 命题 3.2.2 立刻由下面的引理 3.2.1 和 Fefferman-Stein 关于 Sharp 极大函数的定理得到.

引理 3.2.1　设 $m>1,\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n},0<\beta<1$. 假设 K 满足 $H(m)$

条件，$\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)\cap B_{\epsilon_0}$，$\epsilon_0=\frac{(s_1-1)m'}{s_1-m'}$，其中 $m'<s_1<s<\frac{n}{\beta}$，假设 T 在 $L^p(\mu^{1-p})$上有界. 那么存在常数 $C_s>0$，使得 $\forall f\in L^1_{loc}$，$b\in Lip_{\beta,\mu}$，有

$$M^{\#}([b,T]f)(x)\leqslant C_s\mu(x)\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}\left\{M_{\beta,\mu,s}(Tf)(x)+M_{\beta,\mu,s}(f)(x)\right\}\tag{3.2.1}$$

成立.

证明：固定 $s\in(m',\frac{n}{\beta})$，设 $f\in L^1_{loc}$，$x\in\mathbb{R}^n$，令 $B=B(x_0,l)\ni x$. 我们只需证明 $J=\frac{1}{|B|}\int_B|[b,T]f(y)-([b,T]f)_B|\mathrm{d}y$ 被(3.2.1)式的右边控制. 设 $f=f_1+f_2$，其中 $f_1=f\chi_{32B}$，$f_2=f-f_1$. 那么$[b,T]f=[b-b_B,T]f=(b-b_B)Tf-T(b-b_B)f_1-T(b-b_B)f_2=A_1f+A_2f+A_3f$，因此我们有

$$\begin{aligned}J&\leqslant\frac{1}{|B|}\int_B|A_1f(y)-A_1f_B|\mathrm{d}y\\&\quad+\frac{1}{|B|}\int_B|A_2f(y)-A_2f_B|\mathrm{d}y+\frac{1}{|B|}\int_B|A_3f(y)-A_3f_B|\\&\quad\mathrm{d}y\\&=J_1+J_2+J_3.\end{aligned}$$

对于 J_1的估计，由霍尔德不等式，我们可以得到

$$\begin{aligned}J_1&\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B|A_1f(y)|\mathrm{d}y\\&=C\frac{1}{|B|}\int_B|(b-b_B)Tf(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant C\frac{1}{|B|^{\frac{\beta}{n}}}\left\{\frac{1}{|B|}\int_B|b-b_B|^{s'}\mu(y)^{1-s'}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s'}}\\&\quad\left\{\frac{1}{|B|^{1-\frac{s\beta}{n}}}\int_B|Tf(y)|^s\mu(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s}}\\&\leqslant C\frac{\mu(B)}{|B|}\frac{1}{\mu(B)^{\frac{\beta}{n}}}\left\{\frac{1}{\mu(B)}\int_B|b-b_B|^{s'}\mu(y)^{1-s'}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s'}}\end{aligned}$$

$$\times\left\{\frac{1}{\mu(B)^{1-\frac{s\beta}{n}}}\int_B |Tf(y)|^s\mu(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s}}$$
$$\leqslant C\mu(x)\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}M_{\beta,\mu,s}(Tf)(x).$$

对于 J_2，我们固定 s_1 使得 $s>s_1>m'$，并且令 $s_2=\frac{ss_1}{s-s_1}$. 由于 T 在 $L^{s_1}(\mu^{1-s_1})$ 的加权有界性，我们可得

$$J_2\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B |T((b-b_B)f_1)(y)|\mathrm{d}y$$
$$\leqslant C\left\{\frac{1}{|B|}\int_B |T((b-b_B)f_1)(y)|^{s_1}\mu(y)^{1-s_1}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s_1}}\left\{\frac{1}{|B|}\int_B\mu(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{s_1-1}{s_1}}$$
$$\leqslant C\left\{\frac{1}{|B|}\int_B |(b(y)-b_B)f_1(y)|^{s_1}\mu(y)^{1-s_1}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s_1}}\left\{\frac{\mu(B)}{|B|}\right\}^{\frac{s_1-1}{s_1}}$$
$$\leqslant C\frac{\mu(B)}{|B|}^{\frac{s_1-1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s}}\left\{\frac{1}{\mu(32B)^{\frac{\beta}{n}}}\frac{1}{\mu(32B)}\int_{32B}|b(y)-b_B|^{s_2}\mu(y)^{1-s_2}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s_2}}$$
$$\times\left\{\frac{1}{\mu(32B)^{1-\frac{s\beta}{n}}}\int_{32B}|f(y)|^s\mu(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s}}$$
$$\leqslant C\mu(x)\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}M_{\beta,\mu,s}(f)(x).$$

要估计 J_3，我们令 $c_B=\int_{|z-x_0|>32l}K(x_0,z)(b(z)-b_B)f(z)\mathrm{d}z$，于是

$$J_3\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B |A_3f(y)-c_B|\mathrm{d}y$$
$$\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\left|\int_{|z-x_0|>32l}[K(y,z)-K(x_0,z)](b(z)-b_B)f(z)\mathrm{d}z\right|\mathrm{d}y$$
$$=C\frac{1}{|B|}\int_B\sum_{k=5}^{\infty}\int_{2^kl\leqslant|z-x_0|<2^{k+1}l}|[K(y,z)-K(x_0,z)]$$

$$(b(z)-b_B)f(z)|\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\sum_{k=5}^{\infty}\left\{\int_{2^kl\leqslant|z-x_0|<2^{k+1}l}|K(y,z)-K(x_0,z)|^m\right.$$

$$\left.\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m}}(2^kl)^{\frac{n}{m}}k\times\frac{1}{(2^kl)^{\frac{n}{m}}k}\left\{\int_{2^kl\leqslant|z-x_0|<2^{k+1}l}|(b(z)-b_B)\right.$$

$$\left.f(z)|^{m'}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\sup_{k\geqslant5}\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{(2^kl)^n}\int_{2^kl\leqslant|z-x_0|<2^{k+1}l}|(b(z)-b_B)f(z)|^{m'}\right.$$

$$\left.\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}$$

$$\leqslant C\sup_{k\geqslant5}\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{(2^kl)^n}\int_{|z-x_0|<2^{k+1}l}|(b(z)-b_{2^{k+1}B}+b_{2^{k+1}B}-b_B)\right.$$

$$\left.f(z)|^{m'}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}$$

$$\leqslant C\sup_{k\geqslant5}\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{(2^kl)^n}\int_{|z-x_0|<2^{k+1}l}|(b(z)-b_{2^{k+1}B})f(z)|^{m'}\right.$$

$$\left.\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}+\left\{\frac{1}{(2^kl)^n}\int_{|z-x_0|<2^{k+1}l}|(b_{2^{k+1}B}-b_B)f(z)|^{m'}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}$$

$$\leqslant C\sup_{k\geqslant5}\frac{1}{k}E_1+E_2.$$

对于 E_1，固定 $s_1\in(m',s)$，那么$\frac{s_1}{m'}>1$，$\left(\frac{s_1}{m'}\right)'=\frac{s_1}{s_1-m'}$；$\frac{s}{m'}>1$，$\left(\frac{s}{m'}\right)'=\frac{s}{s-m'}$. 运用霍尔德不等式两次，根据 $\mu\in B_{\epsilon_0}$，$\epsilon_0=\frac{(s_1-1)m'}{s_1-m'}$，我们能够得到

$$E_1=\left\{\frac{C}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|(b(z)-b_{2^{k+1}B})\mu(z)^{\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}-1}f(z)\mu(z)^{\frac{1}{s}}\right.$$

$$\left.|^{m'}\mu(z)^{m'(1-\frac{1}{s_1})}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}$$

$$\leqslant\left\{\frac{C}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|(b(z)-b_{2^{k+1}B})\mu(z)^{\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}-1}f(z)\mu(z)^{\frac{1}{s}}\right.$$

$$\left.|^{s_1}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s_1}}\times\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}\mu(z)^{\frac{(s_1-1)m'}{s_1-m'}}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{s_1-m'}{s_1m'}}$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}(|b(z)-b_{2^{k+1}B}|\mu(z)^{\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}-1})^{s_1(\frac{s}{s_1})'}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s_1}\frac{1}{(\frac{s}{s_1})'}}\times\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|f(z)|^s\mu(z)\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s}}\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}\mu(z)\mathrm{d}z\right\}^{\frac{s_1-1}{s_1}}$$

$$\leqslant\left\{\frac{\mu(2^{k+1}B)}{|2^{k+1}B|}\right\}^{\frac{s-s_1}{ss_1}}\left\{\frac{1}{\mu(2^{k+1}B)}\int_{2^{k+1}B}|b(z)-b_{2^{k+1}B}|^{\frac{ss_1}{s-s_1}}\mu(z)^{1-\frac{ss_1}{s-s_1}}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{s-s_1}{ss_1}}\times\left\{\frac{\mu(2^{k+1}B)}{|2^{k+1}B|}\right\}^{\frac{1}{s}}\left\{\frac{1}{\mu(2^{k+1}B)}\int_{2^{k+1}B}|f(z)|^s\mu(z)\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s}}\left\{\frac{\mu(2^{k+1}B)}{|2^{k+1}B|}\right\}^{\frac{s_1-1}{s_1}}$$

$$\leqslant C\mu(x)\,\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}M_{\beta,\mu,s}(f)(x).$$

对于 E_2，因为 $\frac{s}{m'}>1$，$(\frac{s}{m'})'=\frac{s}{s-m'}$，运用霍尔德不等式，$\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)$ 和式子(3.1.2)，我们容易得

$$E_2=|b_{2^{k+1}B}-b_B|\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|f(z)|^{m'}\mu(z)^{\frac{m'}{s}}\mu(z)^{-\frac{m'}{s}}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}$$

$$\leqslant|b_{2^{k+1}B}-b_B|\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|f(z)|^s\mu(z)\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s}}\times\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}\mu(z)^{(-\frac{m'}{s})(\frac{s}{m'})'}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'(\frac{s}{m'})'}}$$

$$\leqslant C(k+1)\left(\frac{\mu(2^{k+1}B)}{|2^{k+1}B|}\right)^{\frac{1}{s}}\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}\left\{\frac{1}{\mu(2^{k+1}B)^{1-\frac{s\beta}{n}}}\int_{2^{k+1}B}|f(z)|^s\mu(z)\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s}}\times\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\left\{\int_{2^{k+1}B}\mu(z)^{-\frac{1}{\frac{s}{m'}-1}}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{s}{m'}-1}\right\}^{\frac{1}{s}}$$

$$\leqslant C(k+1)\left(\frac{\mu(2^{k+1}B)}{|2^{k+1}B|}\right)^{\frac{1}{s}}\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}M_{\beta,\mu,s}(f)(x)\left(\frac{|2^{k+1}B|}{\mu(2^{k+1}B)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\leqslant C(k+1)\mu(x)\,\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}M_{\beta,\mu,s}(f)(x).$$

将 E_1 和 E_2 的估计加到一起，我们得到

$$J_3 = C\sup_{k\geqslant 5}\frac{1}{k}\left(E_1+E_2\right)$$

$$\leqslant C\sup_{k\geqslant 5}\frac{k+2}{k}\mu(x)\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}M_{\beta,\mu,s}(f)(x)$$

$$\leqslant C\mu(x)\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}M_{\beta,\mu,s}(f)(x).$$

引理 3.2.1 的证明完成.

命题 3.2.2 的证明 因为 $\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)$蕴涵 $\mu^{1-r}\in A_r(\mathbb{R}^n)$，根据引理 3.2.1 我们推得

$$\begin{aligned}\|[b,T]f\|_{L^r(\mu^{1-r})} &\leqslant \|M^{\#}\left([b,T]f\right)\|_{L^r(\mu^{1-r})}\\ &\leqslant C\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}\left(\|M_{\beta,\mu,s}(Tf)\|_{L^r(\mu)}+\right.\\ &\qquad\left.\|M_{\beta,\mu,s}(f)\|_{L^r(\mu)}\right)\\ &\leqslant C\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}\|f\|_{L^p(\mu)}.\end{aligned}$$

定理 3.2.1 的证明 证明的主要思想和方法与文[28]一样.作者们在文[28]中已经证明了 $T_j(j=1,2,3)$的这些核 $K_j(j=1,2,3)$满足 $H(m)(m=q,2q,p_0)$条件，根据定理 F，H 和 C 的对偶结论可知 T_1，T_2，T_3满足命题 3.2.1 的条件，故我们得到定理 3.2.1 的结论.

我们知道 $T_4^*=\nabla^2(-\Delta+V)^{-1}$. 根据定理 3.2.1 中的(i)和对偶理论，我们有

推论 3.2.1 假设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$. 设 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$，$0<\beta<1$ 以及 $1<p<q<\infty$. 那么对任意 $b\in Lip_\beta$，有

$$\|[b,T_4]f\|_{L^r}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_\beta}\|f\|_{L^p},\ q'\leqslant p<\infty,$$

和

$$\|[b,T_4^*]f\|_{L^r}\leqslant C_p\|b\|_{Lip_\beta}\|f\|_{L^p},\ 1<p\leqslant q.$$

证明. 因为

$$\begin{aligned}T_4 &= (-\Delta+V)^{-1}\nabla^2=(-\Delta+V)^{-1}(-\Delta)(-\Delta)^{-1}\nabla^2\\ &=(I-(-\Delta+V)^{-1}V)\frac{\nabla^2}{(-\Delta)}=(I-T_1)\frac{\nabla^2}{(-\Delta)}.\end{aligned}$$

我们有

$$[b,T_4]=[b,I-T_1]\frac{\nabla^2}{(-\Delta)}-(I-T_1)[b,\frac{\nabla^2}{(-\Delta)}]. \tag{3.2.2}$$

所以，根据$[b,I-T_1]$和$[b,\frac{\nabla^2}{(-\Delta)}]$（见[1]）的$(L^p,L^r)$有界性，以及 $I-T_1$ 的 L^r 有界性和$\frac{\nabla^2}{(-\Delta)}$（见[1]）的 L^p 有界性，我们可得到

$$\begin{aligned}
&\|[b,T_4]f\|_{L^r}\\
&\leqslant \|[b,I-T_1]\frac{\nabla^2}{(-\Delta)}f\|_{L^r}+\|(I-T_1)[b,\frac{\nabla^2}{(-\Delta)}]f\|_{L^r}\\
&\leqslant C\|b\|_{Lip_\beta}\|\frac{\nabla^2}{(-\Delta)}f\|_{L^p}+C\|[b,\frac{\nabla^2}{(-\Delta)}]f\|_{L^r}\\
&\leqslant C\|b\|_{Lip_\beta}\|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

定理 3.2.2 的证明 由定理 W(1)，可知

$$|T_1f(x)|\leqslant CM(|f|^{q'})^{\frac{1}{q'}}(x) \qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)),$$

其中$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. 任意取 $p>q'$. 如果 $\mu\in A_{\frac{p}{q'}}$，由 Hardy-Littlewood 极大算子在 $L^{\frac{p}{q'}}(\mu)$上的有界性可得：

$$\|T_1f\|_{L^p(\mu)}\leqslant C\left\{\int_{\mathbb{R}^n}M(|f|^{q'})^{\frac{p}{q'}}(x)\mu(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant C\|f\|_{L^p(\mu)}.$$

即 T_1 在 $L^p(\mu)$上的有界性. 又由于 T_1 的核 K_1 满足 $H(q)$条件（见文[7]），根据命题 3.2.2 和定理 F 的对偶结论，我们得到定理 3.2.2 的结论(i).

对于定理 3.2.2 的结论(ii)，我们可以从文[7]的定理 5.10 的证明中得到 T_2 的 $L^p(\mu)$有界性. 为了完整起见，我们给出证明的框架. 文[7]给出

$$T_2^*f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{V(x)^{1/2}f(y)\,\mathrm{d}y}{\{1+m(y,V)|x-y|\}^k|x-y|^{n-1}},$$

以及下面的不等式

$$|T_2f(x)|\leqslant C\{M(|f|^{(2q)'})(x)\}^{\frac{1}{(2q)'}}.$$

令$(2q)'\leqslant p<\infty$，因此，当 $\mu\in A_{\frac{p}{(2q)'}}$ 时，有

$$\begin{aligned}\| T_2 f \|_{L^p(\mu)} &\leqslant C\{\int_{\mathbb{R}^n} \{M(|f|^{(2q)'})(x)\}^{\frac{p}{(2q)'}}\mu(x)\mathrm{d}x\}^p \\ &\leqslant C\{\int_{\mathbb{R}^n} \{|f|^{(2q)'}(x)\}^{\frac{p}{(2q)'}}\mu(x)\mathrm{d}x\}^p \\ &= C\| f \|_{L^p(\mu)}.\end{aligned}$$

因为 T_2 的核 K_2 满足 $H(2q)$（见文[28]），根据命题 3.2.2 和定理 H 的对偶结论，定理 3.2.2 的(ii)得证.

T_3 的 $L^p(\mu)$ 有界性可由下面的估计得到.

$$|T_3 f(x)| \leqslant C\{M(|f|^{p_0'})(x)\}^{\frac{1}{p_0'}} + 2Tf(x),$$

其中 $q<q_1<n$，$\frac{1}{q_1}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{n}$ 以及 $T=\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ 是一个 Calderón-Zygmund 算子（见[7]）.

令 $p'_0\leqslant p<\infty$. 因此，当 $\mu\in A_{\frac{p}{p'_0}}\subset A_p$ 时有

$$\begin{aligned}&\| T_3 f \|_{L^p(\mu)} \\ &\leqslant C\{\int_{\mathbb{R}^n} \{M(|f|^{p_0'})(x)\}^{\frac{p}{p_0'}}\mu(x)\mathrm{d}x\}^p + C\ \| Tf \|_{L^p(\mu)} \\ &\leqslant C\{\int_{\mathbb{R}^n} \{|f|^{(2q)'}(x)\}^{\frac{p}{(2q)'}}\mu(x)\mathrm{d}x\}^p + C\| f \|_{L^p(\mu)} \\ &= C\| f \|_{L^p(\mu)}.\end{aligned}$$

因为 T_3 的核 K_3 满足 $H(p_0)$ 条件（见文[28]），根据命题 3.2.2 和定理 D，定理 3.2.2 的(iii)得证.

根据推论 3.2.1 同样的证明，我们得到下面的推论.

推论 3.2.2 假设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，其中 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\beta}{n}$，$0<\beta<1$ 以及 $1<p<r<\infty$. 设 $\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)\cap B_{\epsilon_0}$，其中 $\epsilon_0=\frac{(s_1-1)q'}{s_1-q'}$，$s_1\in(q',s)$，$s\in(q',\frac{n}{\beta})$，而且满足 $\mu^{1-p}\in A_{\frac{p}{q}}$. 那么对任意 $b\in Lip_{\beta,\mu}$，有下面估计成立

$$\| [b,T_4]f \|_{L^r(\mu^{1-r})} \leqslant C_p \| b \|_{Lip_{\beta,\mu}} \| f \|_{L^p(\mu)},\ q'\leqslant p<\infty$$

和

$$\| [b,T_4^*]f \|_{L^r(\mu^{1-r})} \leqslant C_p \| b \|_{Lip_{\beta,\mu}} \| f \|_{L^p(\mu)},\ 1<p\leqslant q$$

成立.

§3.3　薛定谔算子的 Riesz 变换和 BMO 函数的交换子的加权 L^p 估计

本节考虑关于 $b\in BMO_\mu$ 时的薛定谔算子的 Riesz 变换的交换子的加权估计.

定理 3.3.1　假设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$,$V\in B_q$,$1<p<\infty$. 设 $\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)\cap B_{\epsilon_0}$,$\epsilon_0=\frac{(s_1-1)m'}{s_1-m'}$,这里 $m'<s_1<s<\infty$. 而且满足 $\mu^{1-p}\in A_{\frac{p}{m'}}$. 对于下面的(i)、(ii)和(iii),$m$ 分别取 q,$2q$ 和 p_0. 那么对任意 $b\in BMO_\mu$,有

(i) $\|[b,T_1]f\|_{L^p(\mu^{1-p})}\leqslant C_p\|b\|_{BMO_\mu}\|f\|_{L^p(\mu)}$,$q'\leqslant p<\infty$,

(ii) $\|[b,T_2]f\|_{L^p(\mu^{1-p})}\leqslant C_p\|b\|_{BMO_\mu}\|f\|_{L^p(\mu)}$,$(2q)'\leqslant p<\infty$,

(iii) $\|[b,T_3]f\|_{L^p(\mu^{1-p})}\leqslant C_p\|b\|_{BMO_\mu}\|f\|_{L^p(\mu)}$,$p'_0\leqslant p<\infty$,

其中$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$.

根据对偶理论,已知 $L^p(\mu)$ 和 $L^{p'}(\mu^{1-p'})$ 互为对偶空间. 我们容易得到

$$\|[b,T_1^*]f\|_{L^p(\mu^{1-p})}\leqslant C_p\|b\|_{BMO_\mu}\|f\|_{L^p(\mu)},\ 1<p\leqslant q,$$
$$\|[b,T_2^*]f\|_{L^p(\mu^{1-p})}\leqslant C_p\|b\|_{BMO_\mu}\|f\|_{L^p(\mu)},\ 1<p\leqslant 2q,$$
$$\|[b,T_3^*]f\|_{L^p(\mu^{1-p})}\leqslant C_p\|b\|_{BMO_\mu}\|f\|_{L^p(\mu)},\ 1<p\leqslant p_0,$$

其中$\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$.

定理 3.3.1 的特殊情况($\mu\equiv1$)就是文[28]中的结果,见第一章定理 J. 定理 3.3.1 的证明主要依靠下面的命题 3.3.1.

命题 3.3.1　设 $m>1$,以及 $m'<p<\infty$. 假定 $\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)\cap B_{\epsilon_0}$,$\epsilon_0=\frac{(s_1-1)m'}{s_1-m'}$,其中 $m'<s_1<s<\infty$. 假设 T 在 $L^p(\mu^{1-p})$上是有界的,而且 K 满足 $H(m)$条件. 那么对任意 $b\in BMO_\mu$,$\forall\, p\in(m',\infty)$,$[b,T]$是

从 $L^p(\mu)$ 到 $L^p(\mu^{1-p})$ 有界的，而且有

$$\|[b,T]f\|_{L^p(\mu^{1-p})}\leqslant C_p\|b\|_{BMO_\mu}\|f\|_{L^p(\mu)}.$$

我们运用 Störmberg 的思想. 命题 3.3.1 立刻由下面的引理 3.3.1 和 Fefferman-Stein 关于 Sharp 极大函数的定理得到.

引理 3.3.1 设 $m>1$，以及 $s>m'$. 假设 K 满足 $H(m)$ 条件，$\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)\cap B_{\epsilon_0}$，$\epsilon_0=\dfrac{(s_1-1)m'}{s_1-m'}$，其中 $s_1\in(m',s)$，假设 T 在 $L^p(\mu^{1-p})$，$p\in(m',+\infty)$ 上有界. 那么存在常数 $C_s>0$，使得 $\forall f\in L^1_{loc}$，$b\in BMO_\mu$，有

$$M^{\#}([b,T]f)(x)\leqslant C_s\mu(x)\|b\|_{BMO_\mu}\left\{M_{\mu,s}(Tf)(x)+M_{\mu,s}(f)(x)\right\} \tag{3.3.1}$$

成立.

证明：固定 $s\in(m',\dfrac{n}{\beta})$，设 $f\in L^1_{loc}$，$x\in\mathbb{R}^n$，令 $B=B(x_0,l)\ni x$. 我们只需证明 $J=\dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B|[b,T]f(y)-([b,T]f)_B|\mathrm{d}y$ 被(3.3.1)式的右边控制. 设 $f=f_1+f_2$，其中 $f_1=f\chi_{32B}$，$f_2=f-f_1$. 那么 $[b,T]f=[b-b_B,T]f=(b-b_B)Tf-T(b-b_B)f_1-T(b-b_B)f_2=A_1f+A_2f+A_3f$，因此我们有

$$\begin{aligned}J&\leqslant\frac{1}{|B|}\int_B|A_1f(y)-A_1f_B|\mathrm{d}y+\frac{1}{|B|}\int_B|A_2f(y)-A_2f_B|\\&\quad\mathrm{d}y+\frac{1}{|B|}\int_B|A_3f(y)-A_3f_B|\mathrm{d}y\\&=J_1+J_2+J_3.\end{aligned}$$

对于 J_1 的估计，由霍尔德不等式，我们可以得到

$$\begin{aligned}J_1&\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B|A_1f(y)|\mathrm{d}y\\&=C\frac{1}{|B|}\int_B|(b-b_B)Tf(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant C\frac{1}{|B|}\left\{\frac{1}{|B|}\int_B|b-b_B|^{s'}\mu(y)^{1-s'}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s'}}\end{aligned}$$

$$\times\left\{\frac{1}{|B|}\int_B|Tf(y)|^s\mu(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s}}$$

$$\leqslant C\frac{\mu(B)}{|B|}\frac{1}{\mu(B)}\left\{\frac{1}{\mu(B)}\int_B|b-b_B|^{s'}\mu(y)^{1-s'}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s'}}$$

$$\times\left\{\frac{1}{\mu(B)}\int_B|Tf(y)|^s\mu(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{s}}$$

$$\leqslant C\mu(x)\|b\|_{BMO_\mu}M_{\mu,s}(Tf)(x).$$

对于 J_2，我们固定 s_1 使得 $s>s_1>m'$，并且令 $s_2=\frac{ss_1}{s-s_1}$. 由于 T 在 $L^{s_1}(\mu^{1-s_1})$的加权有界性，我们可得

$$J_2\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B|T((b-b_B)f_1)(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{|B|}\int_B|T((b-b_B)f_1)(y)|^{s_1}\mu(y)^{1-s_1}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s_1}}$$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B\mu(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{s_1-1}{s_1}}$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{|B|}\int_B|(b(y)-b_B)f_1(y)|^{s_1}\mu(y)^{1-s_1}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s_1}}\left(\frac{\mu(B)}{|B|}\right)^{\frac{s_1-1}{s_1}}$$

$$\leqslant C\left(\frac{\mu(B)}{|B|}\right)^{\frac{s_1-1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s}}\frac{1}{\mu(32B)}\left(\frac{1}{\mu(32B)}\int_{32B}|b(y)-b_B|^{s_2}\right.$$

$$\left.\mu(y)^{1-s_2}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s_2}}\times\left(\frac{1}{\mu(32B)}\int_{32B}|f(y)|^s\mu(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\leqslant C\mu(x)\|b\|_{BMO_\mu}M_{\mu,s}(f)(x).$$

要估计 J_3,我们令 $c_B=\int_{|z-x_0|>32l}K(x_0,z)(b(z)-b_B)f(z)\mathrm{d}z$，于是

$$J_3\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B|A_3f(y)-c_B|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\left|\int_{|z-x_0|>32l}[K(y,z)-K(x_0,z)](b(z)-b_B)\right.$$

$$\left.f(z)\mathrm{d}z\right|\mathrm{d}y$$

$$=C\frac{1}{|B|}\int_B\sum_{k=5}^{\infty}\int_{2^kl\leqslant|z-x_0|<2^{k+1}l}|[K(y,z)-K(x_0,z)]$$

$$(b(z)-b_B)f(z)|\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\sum_{k=5}^{\infty}\left\{\int_{2^k l\leqslant|z-x_0|<2^{k+1}l}|K(y,z)-K(x_0,z)|^m\right.$$

$$\left.\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m}}(2^k l)^{\frac{n}{m}}k\times\frac{1}{(2^k l)^{\frac{n}{m}}k}\left\{\int_{2^k l\leqslant|z-x_0|<2^{k+1}l}|(b(z)-b_B)f\right.$$

$$\left.(z)|^{m'}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\sup_{k\geqslant 5}\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{(2^k l)^n}\int_{2^k l\leqslant|z-x_0|<2^{k+1}l}|(b(z)-b_B)f(z)|^{m'}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}$$

$$\leqslant C\sup_{k\geqslant 5}\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{(2^k l)^n}\int_{|z-x_0|<2^{k+1}l}|(b(z)-b_{2^{k+1}B}+b_{2^{k+1}B}-b_B)\right.$$

$$\left.f(z)|^{m'}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}$$

$$\leqslant C\sup_{k\geqslant 5}\frac{1}{k}\left(\left\{\frac{1}{(2^k l)^n}\int_{|z-x_0|<2^{k+1}l}|(b(z)-b_{2^{k+1}B})f(z)|^{m'}\right.\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}+\left\{\frac{1}{(2^k l)^n}\int_{|z-x_0|<2^{k+1}l}|(b_{2^{k+1}B}-b_B)f(z)|^{m'}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}\right)$$

$$\leqslant C\sup_{k\geqslant 5}\frac{1}{k}(E_1+E_2).$$

对于 E_1，固定 $s_1\in(m',s)$，那么$\frac{s_1}{m'}>1$，$\left(\frac{s_1}{m'}\right)'=\frac{s_1}{s_1-m'}$；$\frac{s}{m'}>1$，$\left(\frac{s}{m'}\right)'=\frac{s}{s-m'}$. 运用霍尔德不等式两次，根据 $\mu\in B_{\epsilon_0}$，$\epsilon_0=\frac{(s_1-1)m'}{s_1-m'}$，我们能够得到

$$E_1=\left\{\frac{C}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|(b(z)-b_{2^{k+1}B})\mu(z)^{\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}-1}f(z)\mu(z)^{\frac{1}{s}}\right.$$

$$\left.|^{m'}\mu(z)^{m'(1-\frac{1}{s_1})}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}$$

$$\leqslant\left\{\frac{C}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|(b(z)-b_{2^{k+1}B})\mu(z)^{\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}-1}f(z)\mu(z)^{\frac{1}{s}}\right.$$

$$\left.|^{s_1}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s_1}}\times\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}\mu(z)^{\frac{(s_1-1)m'}{s_1-m'}}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{s_1-m'}{s_1m'}}$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}(|b(z)-b_{2^{k+1}B}|\mu(z)^{\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}-1})^{s_1(\frac{s}{s_1})'}\right.$$

$$\left.\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s_1}\frac{1}{(\frac{s}{s_1})'}}\times\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|f(z)|^s\mu(z)\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s}}\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}\mu(z)\mathrm{d}z\right\}^{\frac{s_1-1}{s_1}}$$

$$\leqslant\left\{\frac{\mu(2^{k+1}B)}{|2^{k+1}B|}\right\}^{\frac{s-s_1}{ss_1}}\left\{\frac{1}{\mu(2^{k+1}B)}\int_{2^{k+1}B}|b(z)-b_{2^{k+1}B}|^{\frac{ss_1}{s-s_1}}\mu(z)^{1-\frac{ss_1}{s-s_1}}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{s-s_1}{ss_1}}\times\left\{\frac{\mu(2^{k+1}B)}{|2^{k+1}B|}\right\}^{\frac{1}{s}}\left\{\frac{1}{\mu(2^{k+1}B)}\int_{2^{k+1}B}|f(z)|^s\mu(z)\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s}}\left\{\frac{\mu(2^{k+1}B)}{|2^{k+1}B|}\right\}^{\frac{s_1-1}{s_1}}$$

$$\leqslant C\mu(x)\|b\|_{Lip_{\beta,\mu}}M_{\beta,\mu,s}(f)(x).$$

对于 E_2，因为 $\frac{s}{m'}>1,(\frac{s}{m'})'=\frac{s}{s-m'}$，运用霍尔德不等式，$\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)$和这个事实 $|b_{2^{k+1}B}-b_B|\leqslant C(k+1)\|b\|_{BMO_\mu}$，我们容易得

$$E_2=|b_{2^{k+1}B}-b_B|\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|f(z)|^{m'}\mu(z)^{\frac{m'}{s}}\mu(z)^{-\frac{m'}{s}}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'}}$$

$$\leqslant|b_{2^{k+1}B}-b_B|\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|f(z)|^s\mu(z)\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s}}\times\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}\mu(z)^{(-\frac{m'}{s})(\frac{s}{m'})'}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{m'(\frac{s}{m'})'}}$$

$$\leqslant C(k+1)\left(\frac{\mu(2^{k+1}B)}{|2^{k+1}B|}\right)^{\frac{1}{s}}\|b\|_{BMO_\mu}\left\{\frac{1}{\mu(2^{k+1}B)}\int_{2^{k+1}B}|f(z)|^s\mu(z)\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{s}}\times\left\{\frac{1}{|2^{k+1}B|}\left\{\int_{2^{k+1}B}\mu(z)^{-\frac{1}{\frac{s}{m'}-1}}\mathrm{d}z\right\}^{\frac{s}{m'}-1}\right\}^{\frac{1}{s}}$$

$$\leqslant C(k+1)\left(\frac{\mu(2^{k+1}B)}{|2^{k+1}B|}\right)^{\frac{1}{s}}\|b\|_{BMO_\mu}M_{\mu,s}(f)(x)\left(\frac{|2^{k+1}B|}{\mu(2^{k+1}B)}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\leqslant C(k+1)\mu(x)\|b\|_{BMO_\mu}M_{\mu,s}(f)(x).$$

将 E_1 和 E_2 的估计加到一起，我们得到

$$J_3=C\sup_{k\geqslant5}\frac{1}{k}(E_1+E_2)$$

$$\leqslant C\sup_{k\geqslant 5}\frac{k+2}{k}\mu(x)\|b\|_{BMO_\mu}M_{\mu,s}(f)(x)$$

$$\leqslant C\mu(x)\|b\|_{BMO_\mu}M_{\mu,s}(f)(x).$$

引理 3.3.1 的证明完成.

命题 3.3.1 的证明 因为 $\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)$ 蕴含 $\mu^{1-p}\in A_p(\mathbb{R}^n)$，根据引理 3.3.1 我们推得

$$\begin{aligned}\|[b,T]f(x)\|_{L^p(\mu^{1-p})}&\leqslant\|M^\#\big([b,T]f(x)\big)\|_{L^p(\mu^{1-p})}\\&\leqslant C\|b\|_{BMO_\mu}\big(\|M_{\mu,s}(Tf)\|_{L^p(\mu)}+\\&\quad\|M_{\mu,s}(f)\|_{L^p(\mu)}\big)\\&\leqslant C\|b\|_{BMO_\mu}\|f\|_{L^p(\mu)}.\end{aligned}$$

根据推论 3.2.1 同样的证明,我们得到下面的推论.

推论 3.3.1 假设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}, V\in B_q$. 设 $\mu\in A_1(\mathbb{R}^n)\cap B_{\epsilon_0}$, $\epsilon_0=\frac{(s_1-1)q'}{s_1-q'}$,这里 $s_1\in(q',s)$,以及 $s\in(q',\infty)$. 而且满足 $\mu^{1-p}\in A_{\frac{p}{q'}}$. 那么对于 $b\in BMO_\mu$，我们有

$$q'\leqslant p<\infty,\ \|[b,T_4]f\|_{L^p(\mu^{1-p})}\leqslant C_p\|b\|_{BMO_\mu}\|f\|_{L^p(\mu)}$$

和

$$1<p\leqslant q,\ \|[b,T_4^*]f\|_{L^p(\mu^{1-p})}\leqslant C_p\|b\|_{BMO_\mu}\|f\|_{L^p(\mu)}$$

成立.

与定理 3.2.2 的证明类似,利用命题 3.3.1 我们容易证明定理 3.3.1. 另外,推论 3.3.1 与推论 3.2.1 的证明完全类似. 这里我们删去细节. 有兴趣的读者可以自行完成这些证明.

第四章　与薛定谔算子相关的 BLO_L 空间

§4.1　引言

由于奇异积分理论在偏微分方程理论中的成功运用，使得调和分析中的函数空间和算子理论得到更多数学家的关注. 也使得调和分析的分支得到重新绽放. 众所周知，一方面，经典的 Hardy 空间 $H^p(0<p\leqslant1)$是 L^p空间在 $0<p\leqslant1$ 范围内适合的替代函数空间. 另一方面，经典的 Hardy 空间 $H^p(0<p\leqslant1)$也是拉普拉斯算子$-\triangle$所产生的算子半群的极大算子在 $L^p(0<p\leqslant1)$空间中的刻画. 自然地，具有势函数的薛定谔算子$-\triangle+V$ 是否也有其所产生的算子半群的极大算子在 L^p $(0<p\leqslant1)$空间中刻画的函数空间呢? 已经有很多数学家在这方面做了有益的探索.

具有反霍尔德类势的薛定谔算子决定的 Hardy 型空间和其对偶空间有界平均震荡函数空间(BMO 型空间)以及一些具有反霍尔德类势的薛定谔算子决定的一些主要算子在这些空间中的性质具有极其重要的价值.

最近几年，很多数学家对这些算子的研究产生了兴趣. Dziubański J. 和 Zienkiewicz J. [9]原创性地分别以原子形式和由算子半群$\{e^{-tL}\}_{t>0}$或 Riesz 变换$\nabla L^{-1/2}$定义的极大函数刻画了与薛定谔算子 L 相关的 Hardy 空间 $H_L^1(\mathbb{R}^n)$. 这个结果被林秦成、刘和平等[20]推广到海森堡群上，Dziubański J. 和 Zienkiewicz J. [9]还通过某种与由势 V 决定的辅助函数相关的某局部极大函数刻画了上述 Hardy 空间 $H_L^1(\mathbb{R}^n)$. 当 $V\in B_{n/2}(\mathbb{R}^n)$，其中 $n\geqslant3$，Dziubański J. 等[12]引入了与 L 相关的 BMO 型空间 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$，并且证明了 $H_L^1(\mathbb{R}^n)$和 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$的对偶

性,还得到了 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$关于 Carleson 测度和一些经典算子关于 L 的版本在 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$上的有界性的刻画.这些算子包括半群极大算子和分数次积分算子 I_α,其中 $\alpha\in(0,n)$.这些结果也被林秦城和刘和平[20]推广到海森堡群上.而且,当 $V\in B_n(n\geqslant 3)$时,董建锋和刘和平[21]进一步建立了算子$\nabla L^{-1/2}$的 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$估计,通过算子$\nabla L^{-1/2}$建立了 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$的 Fefferman-Stein 分解,并且给出 $H_L^1(\mathbb{R}^n)$由$\nabla L^{-1/2}$的共轭算子的一个刻画.国内数学家颜立新和杨大春等在这方面也作出了出色的成果.其中,邓东皋、X. T. DUONG、A. SIKORA 和颜立新[19]对更为一般的热核算子所决定的有界平均震荡函数空间(BMO 型空间)与经典的 BMO 空间进行了比较,还进一步给出了应用.

最近,杨大春、杨东勇和周媛[23]引入了与一个允许函数 ρ 所决定的 BMO 型空间 $BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$和 BLO 型空间 $BLO_\rho(\mathbb{R}^n)$,并建立了局部 Riesz 变换在 $BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$上的有界型以及相应的极大算子从 $BMO_\rho(\mathbb{R}^n)$到 $BLO_\rho(\mathbb{R}^n)$的有界性.后来,杨大春、杨东勇和周媛[22]又引入了在齐型空间上的 BMO 型空间 $BMO_\rho(X)$和 BLO 型空间 $BLO_\rho(X)$,并建立了它们的一些基本性质.这些性质包括 $BMO_\rho(X)$上的 John-Nirenberg 不等式和 $BLO_\rho(X)$的几个等价刻画.他们还得到了自然极大算子,Hardy-Littlewood 极大算子和与 ρ 相关的响应局部算子以及与 ρ 相关的 Littlewood-Paley-g 函数在这些局部空间上的有界性.

经典的 BMO 空间有一个子空间 BLO.关于经典 BLO 空间已经有不少成果,见文[27]、[25]、[24].给出具有反霍尔德类势的薛定谔算子决定的有界平均震荡函数空间(BMO 型空间)对应的子空间 BLO 型空间,并研究一些算子在其上的估计也是一件有意义的事情.本章,我们就是要给出这种 BLO 型空间,并给出平行于经典情况的刻画.然后讨论具有反霍尔德类势的薛定谔算子的极大 Riesz 变换的一个 BLO 型估计.

1980 年 R. R. Coifman 和 R. Rochberg 在文[34]中研究 BMO 空间的等价刻画时引进了 BMO 空间的一个子空间 BLO,定义如下:

$$BLO=\left\{f\in L_{loc}(\mathbb{R}^n):\frac{1}{|B|}\int_B f(x)-\operatorname*{essinf}_B f(x)\,dx\leqslant C\right\}.$$

并且还给出了 BLO 的一个等价刻画：

一个局部可积函数 f 属于 BLO 当且仅当 $f=\alpha\log M^{\#}F+h$，其中 $\alpha>0$，F 是一个局部可积函数且其极大函数 $M^{\#}F$ 是几乎处处有限的，h 是 L^{∞} 函数.

这里 $M^{\#}$ 为自然的极大函数，即 $M^{\#}f(x)=\sup\limits_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\int_B f(x)\,dx$.

J. Dziubański 和 J. Zienkiewicz 在文[9]、[10]、[8]、[11]中研究了与薛定谔算子相关的 Hardy 型空间 H_L^1 和 H_L^p 空间. 后来 J. Dziubański、G. Garrigós 和 T. Martínezs 等在文[12]、[13]中研究了 H_L^1 空间的对偶空间，即适当定义了与薛定谔算子相关的 BMO 型空间 BMO_L 空间，它是 BMO 空间的一个子空间. 并且证明了它是 H_L^1 空间的对偶空间，还进一步研究了一些算子在 BMO_L 空间上的有界性. 对于经典的 BMO 函数，C. Bennett、R. A. DeVore 和 R. Sharpley 在文[33]中指出它的 Hardy-Littlewood 极大函数要么是一致为无穷，要么是从 BMO 到 BMO 的. 可是 J. Dziubański、G. Garrigós 和 T. Martínezs 等在文[12]、[13]中指出薛定谔算子的半群极大算子、Hardy-Littlewood 极大算子和 Poisson 半群极大函数在 BMO_L 空间上都不会为一致无穷.

定义 4.1.1[12]　设 $V\in B_q$，$q\geqslant\frac{n}{2}$，称一个局部可积函数 f 属于 BMO_L，如果存在常数 $C\geqslant 0$ 使得

$$\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)-f_B|\,dy\leqslant C \text{ 和 } \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(y)|\,dy\leqslant C$$

对所有的球 $B\subset\mathbb{R}^n$，和 $B_r=B_r(x)$：$r\geqslant\rho(x)$ 都成立. 这里 $f_B=\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy$ 以及关键半径 $\rho(x)=\frac{1}{m(x,V)}$. 记 $\|f\|_{BMO_L}$ 为式子中最小的常数 C.

注 4.1.1：由于

$$\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(y)-f_{B_r}|\,dy\leqslant\frac{2}{|B_r|}\int_{B_r}|f(y)|\,dy,$$

BMO_L 也可以定义如下：

存在常数 $C\geqslant 0$，使得

$$\frac{1}{|B_s|}\int_{B_s}|f(y)-f_{B_s}|\mathrm{d}y\leqslant C \text{ 和 } \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(y)|\mathrm{d}y\leqslant C$$

对所有的球 $B_s=B_s(x)$ 和 $B_r=B_r(x)$：$s<\rho(x)\leqslant r$ 都成立.

$\|f\|_{BMO_L}$ 实际上是一个范数，而且 BMO_L 为一个 Banach 空间. 进一步还有 $\|f\|_{BMO}\leqslant 2\|f\|_{BMO_L}$. 关于 BMO_L 空间有如下性质（见[12]）：

对于每个 $p\in[1,+\infty)$，存在 $C=C(p,V)>0$，使得对所有 $f\in BMO_L$，有

$$\left(\frac{1}{B}\int_B|f(y)-f_B|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\|f\|_{BMO_L}, \forall B\subset\mathbb{R}^n. \quad (4.1.1)$$

和

$$\left(\frac{1}{B}\int_B|f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\|f\|_{BMO_L}, \forall B=B_r(x): r\geqslant\rho(x). \quad (4.1.2)$$

当 $V\equiv 0$ 时，BMO_L 就是经典的 BMO 空间.

关于经典 BLO 空间的估计有如下几个：

(a)设 Ω 是零阶齐次，在单位球 S^{n-1} 上可积，并且具有零平均的函数. 定义奇异积分算子

$$T_1f(x)=p.v.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y$$

相应的极大算子为

$$T_1^*f(x)=\sup_{0<\varepsilon<N<\infty}\left|\int_{\varepsilon<|x-y|<N}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y\right|$$

胡国恩和张启慧在文[37]中得到.

定理 N[37] 当对某个 $q>2$，$\Omega\in L(\log L)^q(S^{n-1})$，即

$$\int_{S^{n-1}}|\Omega(x)|\log^q(2+|\Omega(x)|)\mathrm{d}x<\infty,$$

并且 Ω 的 L^1 连续模满足：

$$\int_0^1\omega(\delta)\log\left(2+\frac{1}{\delta}\right)\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta}<\infty,$$

这里 $\omega(\delta)=\sup_{|\rho|<\delta}\int_{S^{n-1}}|\Omega(\rho x)-\Omega(x)\mathrm{d}x$. 那么，如果 $f\in BMO$ 使得对于某个 $x_0\in\mathbb{R}^n$，$T_1^*f(x_0)<\infty$，就成立

$$\|T_1^*f\|_{BLO}\leqslant C\|f\|_{BMO}.$$

(b) Winston Ou 在文[36]中证明了：

定理 M[36]　如果存在某一点 $x_0\in\mathbb{R}^n$，使得 $Mf(x_0)<\infty$，那么 $M^\#$ 和 M 都是从 BMO 到 BLO 有界的.

(c) 设 T^* 为 Calderón-Zygmund 极大奇异积分算子：

$$T^*f(x)=\sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{|x-y|>\varepsilon}k(x-y)f(y)\mathrm{d}y\right|$$

其中核 $k(x)$ 满足下列标准条件：

(1) $|k(x)|\leqslant C|x|^{-n}$，$x\neq 0$；

(2) $\int_{R_1<|x|<R_2}k(x)\mathrm{d}x=0\quad(0<R_1<R_2<\infty)$；

(3) $|k(x-y)-k(x)|\leqslant\dfrac{|y|}{|x|^{n+1}}$，$2|y|\leqslant|x|$.

唐林在文[39]中证明了：

定理 O[39]　如果存在某一点 $x_0\in\mathbb{R}^n$，使得 $T^*f(x_0)<\infty$，那么

$$\|T^*f\|_{BLO(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)}.$$

J. Dziubański、G. Garrigós、T. Martínezs 等在文[12]中证明了，如果 $f\in BMO_L$，那么 $Mf(x)$ 是几乎处处有限的，而且 $\|Mf\|_{BMO_L}\leqslant C\|f\|_{BMO_L}$.

这里我们考虑适当的与薛定谔算子相关的 BLO 型空间 BLO_L，类似于 BMO_L 的定义，我们给出 BLO_L 定义：

定义 4.1.2　设 $V\in B_q$，$q\geqslant\dfrac{n}{2}$，称一个局部可积函数 f 属于 BLO_L，如果存在常数 $C\geqslant 0$，使得

$$\frac{1}{|B|}\int_B f(y)-\operatorname*{essinf}_B f(y)\mathrm{d}y\leqslant C \text{ 和 } \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}|f(y)|\mathrm{d}y\leqslant C$$

对所有的球 $B\subset\mathbb{R}^n$，以及 $B_r=B_r(x)$：$r\geqslant\rho(x)$ 都成立. 这里关键半径 $\rho(x)=\dfrac{1}{m(x,V)}$. 我们记 $\|f\|_{BLO_L}$ 为上述式子中最小的常数 C.

注 4.1.2:(a)由定义,显然 $L^{\infty}\subset BLO_{\mathrm{L}}\subset BLO$ 和 $L^{\infty}\subset BLO_{\mathrm{L}}\subset BMO_{\mathrm{L}}$ 成立,并且有

$\|f\|_{BLO}\leqslant C\|f\|_{BLO_{\mathrm{L}}}$ 和 $\|f\|_{BMO_{\mathrm{L}}}\leqslant C\|f\|_{BLO_{\mathrm{L}}}$ 成立.

(b)如果考虑的是非负可测函数 $f(y)\geqslant 0$,因为

$$\frac{1}{|B|}\int_{B}(f(y)-\operatorname*{essinf}_{B}f(y))\mathrm{d}y\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_{B}f(y)\mathrm{d}y,$$

所以有 $f\in BLO_{\mathrm{L}}$ 当且仅当

$$\frac{1}{|B_s|}\int_{B_s}(f(y)-\operatorname*{essinf}_{B_s}f(y))\mathrm{d}y\leqslant C \text{ 和} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}f(y)\mathrm{d}y\leqslant C$$

对所有的球 $B_s=B(x,s)$ 和 $B_r=B(x,r)$:$s<\rho(x)\leqslant r$ 都成立.

§4.2　BLO_{L} 的一个刻画

下面我们来考虑这样定义的 BLO_{L} 函数是否合适?比较经典的 BLO 函数关于 BMO 的刻画(定理 L),我们也建立一个平行于定理 L 的 BLO_{L} 的刻画.下述定理 4.2.1 说明这样定义的 BLO_{L} 空间是合理的.先给出前人的两个定理作为引理.C. Bennett 在文[35]中证明了

引理 4.2.1[35]　设任意方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$,如果 $F\in BMO$,则

$$\frac{1}{|Q|}\int_{Q}M^{\#}F(x)\mathrm{d}x\leqslant c\|F\|_{BMO}+\operatorname*{essinf}_{Q}M^{\#}F(x),$$

其中 c 是一个只和维数 n 有关的常数.特别,如果 $M^{\#}F(x)$ 不是一致为无穷,那么 $M^{\#}F\in BLO$,并且

$$\|M^{\#}F\|_{BLO}\leqslant C\|F\|_{BMO}.$$

那么对于 $F\in BMO_{\mathrm{L}}\subset BMO$,由文[12]中的定理 5.1 和引理 4.2.1 可知 $M^{\#}F(x)$ 不是处处为无穷,所以

$$\|M^{\#}F\|_{BLO}\leqslant C\|F\|_{BMO}\leqslant C\|F\|_{BMO_{\mathrm{L}}}.\tag{4.2.1}$$

C. Bennett 在文[35]中还给出:

引理 4.2.2[35]　一个局部可积函数 f 属于 BLO 当且仅当 $M^{\#}f-f$ 属于 L^{∞}.而且

$$\|M^{\#}f-f\|_{L^{\infty}}=\|f\|_{BLO}.$$

由引理 4.2.2 可知,当 $f\in BLO_{\mathrm{L}}\subset BLO$ 时,有 $M^{\#}f-f\in L^{\infty}$ 且

$$\| M^{\#} f - f \|_{L^\infty} = \| f \|_{BLO} \leqslant C \| f \|_{BLO_L}. \tag{4.2.2}$$

我们关于 BLO_L 的刻画定理是：

定理 4.2.1　设 $V \in B_q, q \geqslant \frac{n}{2}$. 一个 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数 f 属于 BLO_L 当且仅当存在 $h \in L^\infty$ 和 $F \in BMO_L$ 使得

$$f = M^{\#} F + h, \tag{4.2.3}$$

并且

$$\| f \|_{BLO_L} \sim \inf (\| F \|_{BMO_L} + \| h \|_{L^\infty}), \tag{4.2.4}$$

其中下确界是对所有满足(4.2.3)表达式的 F 和 h 取的.

证明：如果 f 有(4.2.3)的表达式，那么由(4.2.1)式可知 $M^{\#} F \in BLO$，并且

$$\| M^{\#} F \|_{BLO} \leqslant C \| F \|_{BMO} \leqslant C \| F \|_{BMO_L}.$$

根据霍尔德不等式和 $M^{\#}$ 的 L^2 有界性，我们有，对任意 $B = B_r(x)$：$r \geqslant \rho(x)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_B |M^{\#} F(y)| \mathrm{d}y &\leqslant \left(\frac{1}{|B|}\int_B |M^{\#} F(y)|^2 \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C\left(\frac{1}{|B|}\int_B |F(y)|^2 \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C \| F \|_{BMO_L}.\end{aligned}$$

由 BLO_L 的定义可得

$$\| M^{\#} F \|_{BLO_L} \leqslant C \| F \|_{BMO_L}. \tag{4.2.5}$$

由于 $h \in L^\infty \subset BLO_L$，所以 $f \in BLO_L$，并且由(4.2.5)式得

$$\| f \|_{BLO_L} \leqslant \| M^{\#} F \|_{BLO_L} + \| h \|_{BLO_L} \leqslant C(\| F \|_{BMO_L} + \| h \|_{L^\infty}). \tag{4.2.6}$$

因此，对(4.2.6)表达式取下确界可得

$$\| f \|_{BLO_L} \leqslant C\inf (\| F \|_{BMO_L} + \| h \|_{L^\infty}). \tag{4.2.7}$$

反过来，如果 $f \in BLO_L \subset BMO_L$，由文[12]和(4.2.2)可知 $M^{\#} f(x)$ 是几乎处处有限的，并且函数 $f(x) - M^{\#} f(x)$ 是本性有界的. 因此 $f = M^{\#} f + (f - M^{\#} f)$. 令 $F = f, h = f - M^{\#} f$，就得到(4.2.3)式. 进而由于

$$\| F \|_{BMO_L} + \| h \|_{L^\infty} = \| f \|_{BMO_L} + \| f - M^{\#} f \|_{L^\infty} \leqslant C \| f$$

$\|_{BLO_L}$，

和(4.2.7)式，可以得到(4.2.4)式，证毕.

§4.3 与具有反霍尔德势的薛定谔算子的极大 Riesz 变换的 BLO_L 估计

我们下面考虑与具有反霍尔德势的薛定谔算子的极大 Riesz 变换是从 BMO_L 到 BLO_L 有界的. 设与具有反霍尔德势的薛定谔算子的 Riesz 变换为：

$$R_j^{\#} L=\frac{\partial}{\partial x_j} L^{-\frac{1}{2}}, j=1,2,\cdots,n.$$

记它的核为 $K_j^L(x,y)$.

我们考虑由薛定谔算子决定的极大 Riesz 变换为：

$$R_j^{L,*} f(x)=\sup_{t>0}\left|\int_{|x-y|>t} K_j^L(x,y) f(y) \mathrm{d} y\right|.$$

设经典的 Riesz 变换：$R_j=\frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}, j=1,2,\cdots,n$. 记它的核为 $K_j(x-y)$. 记经典的极大 Riesz 变换为：

$$R_j^* f(x)=\sup_{t>0}\left|\int_{|x-y|>t} K_j(x-y) f(y) \mathrm{d} y\right|.$$

由于 $V\in B_n$，存在 $q_0>n$，使得 $V\in B_{q_0}$. Z. Shen 在文[7]中证明了，如果 $V\in B_n$，R_j^L 是 Calderón-Zygmund 算子.

引理 4.3.1[7] 当 $V\in B_n$，$K_j^L(j=1,2,\cdots,n)$ 是 Calderón-Zygmund 核，满足：

$$|K_j^L(x,y)|\leqslant\frac{C}{|x-y|^n}, \tag{4.3.1}$$

$$|K_j^L(x+h,y)-|K_j^L(x,y)|\leqslant\frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \tag{4.3.2}$$

$$|K_j^L(x,y+h)-|K_j^L(x,y)|\leqslant\frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \tag{4.3.3}$$

其中 $|h|\leqslant\frac{|x-y|}{2}$ 和 $\delta=1-\frac{n}{q_0}>0$. 有更进一步的估计，对于任何 l

>0,存在 $C_l>0$ 使得成立

$$|K_j^L(x,y)|\leqslant\frac{C_l}{(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)})^l}\frac{1}{|x-y|^n},\tag{4.3.4}$$

和

$$|K_j^L(x,y)-K_j(x-y)|\leqslant\frac{C}{|x-y|^n}(\frac{|x-y|}{\rho(x)})^\theta,\tag{4.3.5}$$

这里 $\theta=2-\frac{n}{q_0}$. 本章的主要定理为:

定理 4.3.1　当 $V\in B_n$,极大 Reisz 变换 $R_j^{L,*}(j=1,2,\cdots,n)$是从 BMO_L 到 BLO_L 有界的,并且对于任意 $f\in BMO_L$,存在 $C>0$,成立

$$\|R_j^{L,*}f\|_{BLO_L}\leqslant C\|f\|_{BMO_L}.$$

证明: 设 $f\in BMO_L(\mathbb{R}^n)$, $B=B(x_0,r)$. 先考虑 $r\geqslant\rho(x_0)$的情况. 可以记

$$f=f\chi_{B^*}+f\chi_{(B^*)^c}=f_1+f_2,$$

其中 B^* 是 B 的同心 2 倍扩张. 由于 $R_j^{L,*}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$上有界,我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B|}\int_B R_j^{L,*}f_1(x)\mathrm{d}x&\leqslant\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|R_j^{L,*}f_1(x)|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\Big(\frac{C}{|B|}\int_{B^*}|f(x)|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant C\|f\|_{BMO_L}.\end{aligned}$$

设 $x\in B$. 根据引理 1.1, $\rho(x)\leqslant Cr$. 令 $B_k^*=B(x_0,2^{k+1}r)$. 运用估计式(4.3.4),我们可以得到

$$\begin{aligned}R_j^{L,*}f_2(x)&\leqslant\int_{(B^*)^c}|K_j^L(x,y)f_2(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\int_{B_{k+1}^*/B_k^*}|K_j^L(x,y)f(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\frac{1}{(2^kr)^n}\int_{B_{k+1}^*}|f(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\|f\|_{BMO_L}\end{aligned}$$

$$\leqslant C\|f\|_{BMO_L}.$$

于是

$$\frac{1}{|B|}\int_B R_j^{L,*}f_2(x)\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_{BMO_L}. \tag{4.3.6}$$

上述讨论表明 R_j^L 在空间 $BMO_L(\mathbb{R}^n)$ 上是良定的，这不同于经典 Riesz 变换 R_j 在空间 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 上的性质.

考虑 $r<\rho(x_0)$ 的情况，我们令

$$f=f\chi_{B^\#}+f\chi_{(B^\#)^c}=f_1^\#+f_2^\#,$$

其中 $B^\#=B(x_0,2\rho(x_0))$. 注意到 $\forall x\in B$，有 $\rho(x)\sim\rho(x_0)$. 类似与(4.3.6)，我们有

$$\frac{1}{|B|}\int_B R_j^{L,*}f_2^\#(x)\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_{BMO_L}.$$

由注 4.1.1(b)，我们只是需要证明

$$\frac{1}{|B|}\int_B R_j^{L,*}f_1^\#(x)\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_{BMO_L}+\operatorname*{essinf}_B R_j^{L,*}f(x). \tag{4.3.7}$$

显然

$$\frac{1}{|B|}\int_B R_j^{L,*}f_1^\#(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{|B|}\int_B|R_j^{L,*}f_1^\#(x)-R_j^*f_1^\#(x)|\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{|B|}\int_B R_j^*f_1^\#(x)\mathrm{d}x.$$

设 $x\in B$ 以及 $B_{x,k}=B(x,2^{2-k}\rho(x_0))$，$k=0,1,2,\cdots$. 注意到 $\rho(x)\sim\rho(x_0)$，显然有 $|f_{B_{x,0}}|\leqslant C\|f\|_{BMO_L}$. 因为

$$|f_{B_{x,k}}-f_{B_{x,k-1}}|\leqslant C\|f\|_{BMO},$$

我们有

$$|f_{B_{x,k}}|\leqslant C(k+1)\|f\|_{BMO_L}.$$

于是

$$\int_{B_{x,k}}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant C(k+1)|B_{x,k}|\,\|f\|_{BMO_L}.$$

由估计式(4.3.5)，我们可得

$$|R_j^{L,*}f_1^\#(x)-R_j^*f_1^\#(x)|\leqslant\int_{B^\#}|K_j^L(x,y)-K_j(x-y)\|f(y)$$

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{d}y \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_{x,k}/B_{x,k+1}} |K_j^L(x,y)-K_j(x \\
&\quad -y)\| f(y)|\mathrm{d}y \\
&\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\theta} \frac{1}{(2^{-k}\rho(x_0))^n}\int_{B_{x,k}} |f(y)| \\
&\mathrm{d}y \\
&\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)2^{-k\theta} \|f\|_{BMO_L} \\
&\leqslant C\|f\|_{BMO_L}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\frac{1}{|B|}\int_B |R_j^{L,*}f_1^{\#}(x)-R_j^*f_1^{\#}(x)|\mathrm{d}x \leqslant C\|f\|_{BMO_L}. \quad (4.3.8)
$$

剩下只需证明

$$
\frac{1}{|B|}\int_B R_j^* f_1^{\#}(x)\mathrm{d}x \leqslant C\|f\|_{BMO_L} + \operatorname*{essinf}_B R_j^{L,*}f(x). \quad (4.3.9)
$$

设 $B_k^{\#}=B(x_0,2^{1-k}\rho(x_0)),k=0,1,2,\cdots,k_0$，其中 k_0 满足 $2^{-k_0-1}\rho(x_0)\leqslant r<2^{-k_0}\rho(x_0)$. 记

$$
\begin{aligned}
f_1^{\#} &= (f_1^{\#}-f_{B_{k_0}^{\#}})\chi_{2B_{k_0}^{\#}} + (f_1^{\#}-f_{B_{k_0}^{\#}})\chi_{(2B_{k_0}^{\#})^c} + f_{B_{k_0}^{\#}} \\
&= f_{1,1}+f_{1,2}+f_{1,3}.
\end{aligned}
$$

由 R_j^* 的核的消失条件，可知

$$
R_j^* f_{1,3}=0. \quad (4.3.10)
$$

因为 R_j^* 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界，我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B R_j^* f_{1,1}(x)\mathrm{d}x &\leqslant \frac{1}{|B|}\int_B |R_j^* f_{1,1}(x)|^2\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{C}{|2B_{k_0}^{\#}|}\int_{2B_{k_0}^{\#}} |f_1^{\#}(x)-f_{B_{k_0}^{\#}}|^2\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C\|f\|_{BMO}. \quad (4.3.11)
\end{aligned}
$$

由于 $R_j^{L,*}f(x)\geqslant 0$，故 $\operatorname*{essinf}_B R_j^{L,*}f(x)$ 存在. 对于任何 $\epsilon>0$，存在 $x_\epsilon\in B$，使得成立

$$R_j^{L,*}f(x_\epsilon)\leqslant \operatorname*{essinf}_B R_j^{L,*}f(x)+\epsilon. \tag{4.3.12}$$

任意取 $x\in B$,我们有

$$R_j^*(f_{1,2})(x)\leqslant|R_j^*(f_{1,2})(x)-R_j^*(f_{1,2})(x_\epsilon)|+R_j^*(f_{1,2})(x_\epsilon). \tag{4.3.13}$$

另一方面由 R_j^* 的定义和其核的消失条件,可以得到

$$\begin{aligned}
R_j^*(f_{1,2})(x_\epsilon)&=\sup_{t>0}\left|\int_{|y-x_\epsilon|>t}K_j(x_\epsilon-y)(f_1^\#(y)-f_{B_{k_0}^\#})\right.\\
&\quad\left.\chi_{(2B_{k_0}^\#)^c}(y)\mathrm{d}y\right|\\
&=\sup_{t>0}\left|\int_{|y-x_\epsilon|>\max(t,32^{-k_0}\rho(x_0))}K_j(x_\epsilon-y)(f_1^\#(y)\right.\\
&\quad\left.-f_{B_{k_0}^\#})\chi_{(2B_{k_0}^\#)^c}(y)\mathrm{d}y\right|\\
&\leqslant\sup_{t>0}\left|\int_{|y-x_\epsilon|>\max(t,32^{-k_0}\rho(x_0))}K_j(x_\epsilon-y)(f_1^\#(y)\right.\\
&\quad\left.-f_{B_{k_0}^\#})\mathrm{d}y\right|+\sup_{t>0}\left|\int_{|y-x_\epsilon|>\max(t,32^{-k_0}\rho(x_0))}K_j\right.\\
&\quad\left.(x_\epsilon-y)(f_1^\#(y)-f_{B_{k_0}^\#})\chi_{2B_{k_0}^\#}(y)\mathrm{d}y\right|\\
&\leqslant R_j^*(f_1^\#)(x_\epsilon)+C\int_{22^{-k_0}\rho(x_0)<|y-x_0|<2^{2-k_0}\rho(x_0)}\\
&\quad|K_j(x_\epsilon-y)\|f(y)-f_{B_{k_0}^\#}|\mathrm{d}y\\
&\leqslant R_j^*(f_1^\#)(x_\epsilon)+\frac{C}{(2^{2-k_0}\rho(x_0))^n}\\
&\quad\int_{|y-x_0|<2^{2-k_0}\rho(x_0)}|f(y)-f_{B_{k_0}^\#}|\mathrm{d}y\\
&\leqslant R_j^*(f_1^\#)(x_\epsilon)+C\|f\|_{BMO}.
\end{aligned}$$

类似于(4.3.6)和(4.3.8)的证明,我们有

$$\begin{aligned}
&R_j^*(f_1^\#)(x_\epsilon)\\
&=\sup_{t>0}\left|\int_{|y-x_\epsilon|>t}K_j(x_\epsilon-y)f_1^\#(y)\mathrm{d}y\right|\\
&\quad-\sup_{t>0}\left|\int_{|y-x_\epsilon|>t}K_j^L(x_\epsilon,y)f(y)\mathrm{d}y\right|+R_j^{L,*}f(x_\epsilon)\\
&\leqslant\sup_{t>0}\left|\int_{|y-x_\epsilon|>t}[K_j(x_\epsilon-y)f_1^\#(y)-K_j^L(x_\epsilon,y)f(y)]\mathrm{d}y\right|+R_j^{L,*}f(x_\epsilon)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \sup_{t>0} \left| \int_{|y-x_\epsilon|>t} [K_j(x_\epsilon - y) - K_j^L(x_\epsilon, y)] f_1^{\#}(y) \mathrm{d}y \right|$$

$$+ \sup_{t>0} \left| \int_{|y-x_\epsilon|>t} K_j^L(x_\epsilon, y) f(y) \chi_{(B^{\#})^c}(y) \mathrm{d}y \right| + R_j^{L,*} f(x_\epsilon)$$

$$\leqslant C \| f \|_{BMO_L} + R_j^{L,*} f(x_\epsilon).$$

所以由(4.3.10)、(4.3.11)、(4.3.12)和(4.3.13)，我们只需证明式(4.3.15)就可以得到(4.3.9).

$$|R_j^*(f_{1,2})(x) - R_j^*(f_{1,2})(x_\epsilon)| \leqslant C \| f \|_{BMO_L}. \tag{4.3.14}$$

事实上我们只需证明对于任何 $x \in B$，成立

$$|R_j^*(f_{1,2})(x) - R_j^*(f_{1,2})(x_0)| \leqslant C \| f \|_{BMO_L}. \tag{4.3.15}$$

因为

$$|R_j^*(f_{1,2})(x) - R_j^*(f_{1,2})(x_0)|$$

$$\leqslant \int_{(2B_{k_0}^{\#})^c} |K_j(x_0 - y) - K_j(x - y)| |f_{1,2}(y)| \mathrm{d}y$$

$$+ \sup_{t>0} \int_{|y-x|>t, |y-x_0|<t} |K_j(x - y)| |f_{1,2}(y)| \mathrm{d}y$$

$$+ \sup_{t>0} \int_{|y-x_0|>t, |y-x|<t} |K_j(x_0 - y)| |f_{1,2}(y)| \mathrm{d}y$$

$$\doteq I_1 + I_2 + I_3.$$

众所周知，$|K_j(x-y) - K_j(x)| \leqslant \dfrac{C|y|}{|x|^{n+1}}$，$|y| \leqslant \dfrac{|x|}{2}$. 对于 I_1，运用霍尔德不等式，我们得到

$$I_1 \leqslant \sum_{k=0}^{k_0-1} \int_{B_k^{\#}/B_{k+1}^{\#}} |K_j(x_0 - y) - K_j(x - y)| |f_1^{\#}(y) - f_{B_{k_0}^{\#}}| \mathrm{d}y$$

$$+ |f_{B_{k_0}^{\#}}| \left| \int_{(B_0^{\#})^c} |K_j(x_0 - y) - K_j(x - y)| \mathrm{d}y \right.$$

$$\leqslant C \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{2^{k-k_0}}{|B_k^{\#}|} \int_{B_k^{\#}} \left(|f(y) - f_{B_k^{\#}}| + |f_{B_k^{\#}} - f_{B_{k_0}^{\#}}| \right) \mathrm{d}y$$

$$+ C(k_0+1) 2^{-k_0} \| f \|_{BMO_L}$$

$$\leqslant C\sum_{k=0}^{k_0-1}(k_0-k+1)2^{k-k_0}\|f\|_{BMO}+C\|f\|_{BMO_L}$$
$$\leqslant C\|f\|_{BMO_L}.$$

对于 I_2，当 $t>2^{2-k_0}\rho(x_0)$，我们有

$$\sup_{t>0}\int_{|y-x|>t,|y-x_0|<t}|K_j(x-y)\|f_{1,2}(y)|\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\sup_{t>0}\int_{|y-x|>t,|y-x_0|<t}|K_j(x-y)\|f(y)-f_{B_{k_0}^{\#}}|\chi_{(B_{k_0}^{\#})^c}(y)\mathrm{d}y$$
$$+\sup_{t>0}\int_{|y-x|>t,|y-x_0|<t}|K_j(x-y)\|f\chi_{(B^{\#})^c}(y)|\mathrm{d}y$$
$$\leqslant C\int_{t<|y-x|<t+2^{-k_0}\rho(x_0)}\frac{1}{|x-y|^n}|f(y)-f_{B_{k_0}^{\#}}|\mathrm{d}y+$$
$$C\int_{t<|y-x|<t+2^{-k_0}\rho(x_0)}\frac{1}{|x-y|^n}|f\chi_{(B^{\#})^c}(y)|\mathrm{d}y$$
$$\leqslant Ct^{-n}\int_{t<|y-x|<t+2^{-k_0}\rho(x_0)}|f(y)-f_{B_t}|\mathrm{d}y+Ct^{-n}\int_{2\rho(x_0)<|y-x_0|<2t}$$
$$|f(y)|\mathrm{d}y+C\|f\|_{BMO}\left(\frac{t}{2^{-k_0}\rho(x_0)}\right)^{-1}\ln\left(\frac{t}{2^{-k_0}\rho(x_0)}\right)$$
$$\leqslant Ct^{-n}\int_{|y-x_0|<2t}|f(y)-f_{B_t}|\mathrm{d}y+C\|f\|_{BMO_L}+C\|f\|_{BMO}$$
$$\left[\frac{t}{2^{-k_0}\rho(x_0)}\right]^{-1}\ln\left[\frac{t}{2^{-k_0}\rho(x_0)}\right]$$
$$\leqslant C\|f\|_{BMO_L}\left\{2+\left[\frac{t}{2^{-k_0}\rho(x_0)}\right]^{-1}\ln\left[\frac{t}{2^{-k_0}\rho(x_0)}\right]\right\}$$
$$\leqslant C\|f\|_{BMO_L},$$

其中 $B_t=B(x_0,2t)$.

当 $t<2^{2-k_0}\rho(x_0)$时，显然有，$I_2=0$. 这样我们得到

$$I_2\leqslant C\|f\|_{BMO_L}.$$

对于 I_3的估计完全类似于 I_2的估计，这里略去细节. 由 I_1、I_2、I_3的估计，我们得到式(4.3.15)成立.

由前面讨论可知

$$\frac{1}{|B|}\int_B R_j^* f_1^{\#}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C\|f\|_{BMO_L} + \operatorname*{essinf}_B R_j^{L,*} f(x) + \epsilon.$$

由上式和 ϵ 的任意性，可以得到(4.3.9)，从而由定义 4.1.2 后的注 4.1.2(b)可得：

$$\|R_j^{L,*} f\|_{BLO_L} \leqslant C\|f\|_{BMO_L}.$$

定理 4.3.1 得到证明.

第五章　抛物型薛定谔算子决定的算子的 L^p 估计

§5.1　引言

前面两章我们研究的是与时间无关的椭圆型的薛定谔算子 $-\Delta+V$. 与时间有关的抛物型偏微分方程是一类重要的方程，相应具有反霍尔德类势的抛物型薛定谔算子是 $\partial_t-\Delta+V$，其中 V 属于反霍尔德类. $\partial_t-\Delta+V$ 所在的底空间是具有抛物度量的空间 $\mathbb{R}^n\times[0,T]$ 或者 $\mathbb{R}^{n+1}$. 其中的度量为：

$$\rho((x',t),(y',s))=\max\{|x'-y'|,|t-s|^{\frac{1}{2}}\},$$
$$(x',t),(y',s)\in\mathbb{R}^n\times[0,T](\mathbb{R}^{n+1}).$$

把椭圆型的薛定谔算子的相关问题做到相应的抛物型薛定谔算子上是有意义的事情. 这里，我们考虑的是有限时域的抛物型空间 $\mathbb{R}^n\times[0,T]$. 其中 $\mathbb{R}^n$ 是维欧氏空间，T 是有限实数. 我们这里还定义以 $x=(x',t)\in\mathbb{R}^n\times[0,T]$ 为中心、以 r 为半径的抛物型球体为 $B(x,r)=\{y=(y',s)\in\mathbb{R}^n\times[0,T]:|x'-y'|<r,|s-t|<r^2\}=B(x',r)\times(t-r^2,t+r^2)$.

在本章中，我们考虑的抛物型薛定谔微分算子定义为：

$$P=\frac{\partial}{\partial t}-\Delta+V\qquad\mathbb{R}^n\times[0,T],n\geqslant 3,\tag{5.1.1}$$

这里 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2'^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n'^2}$，$x'=(x_1',x_2',\ldots,x_n')\in\mathbb{R}^n$，$V(x')$ 是一个与变量 t 无关的非负势函数. 我们将假定 V 属于反霍尔德类 B_q，其中 $q\geqslant\frac{n}{2\mu}(0<\mu<\frac{3}{5})$，我们关注于算子 $\nabla^2\left(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle+V\right)^{-1}$ 的

L^p 有界性.

我们运用 Z. Shen 在文[7]中的方法得到了以下定理.

定理 5.1.1　设对于某个满足 $q \geqslant \frac{n}{2\mu}(1<\mu<\frac{3}{5})$ 的 q，$V \in B_q$. 则当 $1 \leqslant p \leqslant q$ 时，有下式成立.

$$\| \nabla^2 (\frac{\partial}{\partial t} - \triangle + V)^{-1} f \|_p \leqslant C_p \| f \|_p, \tag{5.1.1}$$

这里 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1'}, \frac{\partial}{\partial x_2'}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n'})$，$x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n') \in \mathbb{R}^n$，$C_p$ 仅与 p、n、T 和式 (2.1.2)中的常数有关.

在本章中，除非特别声明，我们将用 C 和 c 表示常数，它们不必在每行是一样的，而且至多与式子(2.1.2)中的常数和维数 n 有关. 我们用 $A \sim B$ 表示存在常数 $C>0$ 和 $c>0$ 使得 $c \leqslant \frac{A}{B} \leqslant C$.

5.2　辅助函数 $m(x', V)$

在本节，我们总假定对某个 $q > \frac{n}{2a}(0<a<\frac{n}{2})$，$V \in B_q$.

根据第二章第一节性质二，$V \in B_q$，$q>1$ 蕴含着 $V(x')\mathrm{d}x'$ 是一个双倍测度，见(2.1.2). 事实上，如果 $V \in B_q$，$q>1$，那么 V 还是个 MuckenhouptA_∞ 权函数.（见[46]）

引理 5.2.1　存在 $C>0$ 使得对于 $0<r<R<\infty$，$0<a<\frac{n}{2}$，

$$\frac{1}{r^{n-2a}} \int_{B(x',r)} V(y')\mathrm{d}y' \leqslant C\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}-2a} \frac{1}{R^{n-2a}} \int_{B(x',R)} V(y')\mathrm{d}y'. \tag{5.2.1}$$

证明: 根据霍尔德不等式和式(2.1.2)，容易得到

$$\frac{1}{|B(x',r)|} \int_{B(x',r)} V(y')\mathrm{d}y' \leqslant \left\{ \frac{1}{|B(x',r)|} \int_{B(x',r)} |V(y')|^q \mathrm{d}y' \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{n}{q}} \left\{ \frac{1}{|B(x',R)|} \int_{B(x',R)} \right.$$

$$|V(y')|^q \mathrm{d}y'\Big\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}} \left\{\frac{1}{|B(x',r)|}\int_{B(x',r)} |V(y')|\mathrm{d}y'\right\}.$$

因此我们可以得到

$$\frac{1}{r^{n-2a}}\int_{B(x',r)} V(y')\mathrm{d}y' \leqslant C\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{q}-2a}\frac{1}{R^{n-2a}}\int_{B(x',R)} V(y')\mathrm{d}y'.$$

根据引理 5.2.1 和假设 $q>\frac{n}{2a}$,我们可以得到:对于任意 $x'\in\mathbb{R}^n$,有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^{n-2a}}\int_{B(x',r)} V(y')\mathrm{d}y'=0 \tag{5.2.2}$$

以及

$$\lim_{r\to \infty}\frac{1}{r^{n-2a}}\int_{B(x',r)} V(y')\mathrm{d}y'=\infty. \tag{5.2.3}$$

本章我们给出与第二章稍微不同的辅助函数和它的性质.

定义 5.2.1 设 $x'\in\mathbb{R}^n$,辅助函数 $m(x',V)$定义如下

$$\frac{1}{m(x',V)}=\sup_{r>0}\left\{r:\frac{1}{r^{n-2a}}\int_{B(x',r)} V(y')\mathrm{d}y'\leqslant 1\right\}. \tag{5.2.4}$$

对于定义 5.2.1 中定义的辅助函数与第一章中的辅助函数有类似的性质:

如果 $r=\frac{1}{m(x',V)}$,则

$$\frac{1}{r^{n-2a}}\int_{B(x',r)} V(y')\mathrm{d}y'=1. \tag{5.2.5}$$

事实上,如果存在 $A<1$ 使得

$$\frac{1}{r^{n-2a}}\int_{B(x',r)} V(y')\mathrm{d}y'=A<1$$

成立,根据绝对连续性,则存在 $r'>r$ 使得

$$\frac{1}{r'^{n-2a}}\int_{B(x',r')} V(y')\mathrm{d}y'=A+\varepsilon<1.$$

这就与条件 $r=\frac{1}{m(x',V)}$ 矛盾.

根据引理 5.2.1,如果 $\frac{1}{r^{n-2a}}\int_{B(x',r)}V(y')\mathrm{d}y'\sim 1$,则 $r\sim\frac{1}{m(x',V)}$.

下面的引理是非常有用的.

引理 5.2.2　存在常数 $C>0$,$c>0$ 和 $k_0>0$,使得对于 $x',y'\in\mathbb{R}^n$ 有

$$(\mathrm{a})m(x',V)\sim m(y',V),|x'-y'|<\frac{c}{m(x',V)};$$

$$(\mathrm{b})m(y',V)\leqslant C\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^{k_0}m(x',V);$$

$$(\mathrm{c})m(y',V)\geqslant\frac{cm(x',V)}{\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^{\frac{k_0}{k_0+1}}}.$$

证明.　令 $r\sim\frac{1}{m(x',V)}$,假设 $|x'-y'|\leqslant Cr$,由于 $V\mathrm{d}x'$ 是一个双倍测度,

$$\forall z'\in B(x'r),|z'-y'|\leqslant|z'-x'|+|x'-y'|\leqslant Cr,$$

那么 $B(x',r)\subset B(y',Cr)$. 因此

$$\int_{B(x',r)}V(z')\mathrm{d}z'\leqslant\int_{B(y',Cr)}V(z')\mathrm{d}z'\leqslant C\int_{B(y',r)}V(z')\mathrm{d}z'.$$

类似的,我们可以得到

$$\int_{B(y',r)}V(z')\mathrm{d}z'\leqslant C\int_{B(x',r)}V(z')\mathrm{d}z'.$$

于是

$$\frac{1}{r^{n-2a}}\int_{B(y',r)}V(z')\mathrm{d}z'\sim\frac{1}{r^{n-2a}}\int_{B(x',r)}V(z')\mathrm{d}z'=1.$$

由此推出

$$m(y',V)\sim\frac{1}{r}=m(x',V).$$

要证明(b),假设 $|y'-x'|\sim 2^j r$,$j\geqslant 1$. 设 $0<r_1<r$ 和 $2^k r_1\sim 2^j r$. 那么根据引理 5.2.1.

$$\int_{B(y',r_1)}V(z')\mathrm{d}z'\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}\int_{B(y',2^k r_1)}V(z')\mathrm{d}z'$$

$$\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}\int_{B(y',2^jr)}V(z')\mathrm{d}z'$$
$$\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}\int_{B(x',2^jr)}V(z')\mathrm{d}z'$$
$$\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}C_0^j\int_{B(x',r)}V(z')\mathrm{d}z'$$
$$\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}C_0^j r^{n-2a}.$$

那么,若 $r_1\leqslant C_1^{-j}r$,取 C_1 足够大,因为 $\frac{n}{q}-2a>0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1^{n-2a}}\int_{B(y',r_1)}V(z')dz'&\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}C_0^j\left(\frac{r}{r_1}\right)^{n-2a}\\&\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}C_0^j\left(\frac{2^k}{2^j}\right)^{n-2a}\\&=C2^{j(2a-n+\frac{n}{q}-2a)}\left(\frac{2^k}{2^j}\right)^{\frac{n}{q}-2a}C_0^j\\&\leqslant\left(2^{\frac{n}{q}-n}C_0\right)^j\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{n}{q}-2a}\\&\leqslant\left(2^{\frac{n}{q}-n}C_0C_1^{\frac{n}{q}-2a}\right)^j\\&\leqslant\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此,根据定义 5.2.1 有

$$\frac{1}{m(y',V)}\geqslant C_1^{-j}r.$$

由此推出

$$\begin{aligned}m(y',V)&\leqslant C_1^j m(x',V)=(2^j)^{\log_2 C_1}m(x',V)=\left(2^jr\,\frac{1}{r}\right)^{\log_2 C_1}m(x',V)\\&\leqslant C\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^{\log_2 C_1}m(x',V)\\&=C\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^{k_0}m(x',V),k_0=\log_2 C_1.\end{aligned}$$

最后我们来证明(c).我们可以假定

$$|x'-y'|\geqslant\frac{1}{m(y',V)}.$$

否则容易可由(a)得到同样的结果.

根据(b)

$m(x',V)\leqslant C\{1+|x'-y'|m(y',V)\}^{k_0}m(y',V)\leqslant C|x'-y'|^{k_0}m(y',V)^{k_0+1}$.

于是

$$m(y',V)\geqslant\frac{Cm(x',V)^{\frac{1}{k_0+1}}}{|x'-y'|^{\frac{k_0}{k_0+1}}}\geqslant\frac{Cm(x',V)}{\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^{\frac{k_0}{k_0+1}}}.$$

证明完成.

根据引理 5.2.2,我们有

推论 5.2.1 存在常数 $C>0,c>0$ 和 $k_0>0$,使得对于任意 $x',y'\in\mathbb{R}^n$ 有

$$c\{1+|x'-y'|m(y',V)\}^{\frac{1}{k_0+1}}\leqslant 1+|x'-y'|m(x',V)\leqslant C\{1+|x'-y'|m(y',V)\}^{k_0+1}\tag{5.2.6}$$

证明:根据引理 5.2.2 的(c)

$$m(x',V)\geqslant\frac{Cm(y',V)}{\{1+|x'-y'|m(y',V)\}^{\frac{k_0}{k_0+1}}}=\frac{Cm(y',V)\{1+|x'-y'|m(y',V)\}^{\frac{1}{k_0+1}}}{1+|x'-y'|m(y',V)}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&c\{1+|x'-y'|m(y',V)\}^{\frac{1}{k_0+1}}\\
&\leqslant\frac{m(x',V)}{m(y',V)}\{1+|x'-y'|m(y',V)\}=\frac{m(x',V)}{m(y',V)}+|x'-y'|m(x',V)\\
&\leqslant C\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^{\frac{k_0}{k_0+1}}+C|x'-y'|m(x',V)\\
&\leqslant\begin{cases}C\{2^{\frac{k_0}{k_0+1}}+|x'-y'|m(x',V)\} & ,|x'-y'|m(x',V)\leqslant 1\\ C(2^{\frac{k_0}{k_0+1}}+1)|x'-y'|m(x',V) & ,|x'-y'|m(x',V)\geqslant 1\end{cases}\\
&\leqslant C\{1+|x'-y'|m(x',V)\}.
\end{aligned}$$

运用霍尔德不等式和 B_q 条件,我们可以得到,

$$\int_{B(x',R)}\frac{V(y')}{|x'-y'|^{n-2a}}\mathrm{d}y'\leqslant\frac{C}{R^{n-2a}}\int_{B(x',R)}V(y')\mathrm{d}y'.\tag{5.2.7}$$

(5.2.7)式是基于以下事实，

$$\int_{B(x',R)}\frac{V(y')}{|x'-y'|^{n-2a}}\mathrm{d}y'$$

$$\leqslant\left\{\int_{B(x',R)}|V(y')|^{q}\mathrm{d}y'\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\int_{B(x',R)}\frac{1}{|x'-y'|^{(n-2a)q'}}\mathrm{d}y'\right\}^{\frac{1}{q'}}$$

$$\leqslant|B(x',R)|^{\frac{1}{q}}\frac{1}{|B(x',R)|}\int_{B(x',R)}V(y')\mathrm{d}y'\left\{\int_{0}^{R}r^{n-1+(n-2a)q'}dr\right\}^{\frac{1}{q'}}$$

$$=C\frac{1}{R^{n}}\int_{B(x',R)}V(y')\mathrm{d}y'R^{\frac{n}{q}}(R^{n+q'(2a-n)})^{\frac{1}{q'}}$$

$$=C\frac{1}{R^{n-2a}}\int_{B(x',R)}V(y')\mathrm{d}y',$$

其中 $q'(n-2a)<n$，因为 $q>\frac{n}{2a}$.

类似地，如果 $V\in B_q$，则有 $V\in B_{q+\epsilon}$. 进而可以得到

$$\int_{B(x',R)}\frac{V(y')}{|x'-y'|^{n-a}}\mathrm{d}y'\leqslant\frac{C}{R^{n-a}}\int_{B(x',R)}V(y')\mathrm{d}y'. \qquad (5.2.8)$$

引理 5.2.3 存在常数 $C>0$ 和 $k_0>0$，使得当 $Rm(x',V)\leqslant1$，则有

$$\frac{1}{R^{n-2a}}\int_{B(x',R)}V(y')\mathrm{d}y'\leqslant C\{Rm(x',V)\}^{k_0}. \qquad (5.2.9)$$

证明: 设 $r=\frac{1}{m(x',V)}$. 假定 $2^jr\leqslant R<2^{j+1}r$, $j\geqslant0$. 那么根据双倍条件(1.2.1)，

$$\int_{B(x',R)}V(y')\mathrm{d}y'\leqslant C_0^{j+1}\int_{B(x',r)}V(y')\mathrm{d}y'=C_0^{j+1}r^{n-2a}.$$

由此推出

$$\frac{1}{R^{n-2a}}\int_{B(x',R)}V(y')\mathrm{d}y'$$

$$\leqslant C_0^{j+1}\frac{r}{R}^{n-2a}\leqslant C_0(C_0 2^{2a-n})^{j}$$

$$=C2^{j(2a-n)}2^{j\log_2 C_0}\leqslant C\frac{R}{r}^{(2a-n)+\log_2 C_0}$$

$$=C(Rm(x',V))^{\log_2 C_0+2a-n}.$$

我们用一个 C. Fefferman 和 D. H. Phong 有关的引理[48]结束这一节，它在下面的抛物型薛定谔算子 $\frac{\partial}{\partial t}-\triangle+V$ 的基本解的估计中起关键作用.

引理 5.2.4 设 $u(x',t)\in C_c^1(\mathbb{R}^n\times[0,T])$，则

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}u(x)^2m(x',V)^2\mathrm{d}x\\&\leqslant C\left\{\int_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}|\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}u(x)^2V(x')\mathrm{d}x\right\}.\end{aligned}$$

引理 5.2.4 的证明容易由文[7]中的引理 2.5 得到.

§ 5.3 基本解的估计

本节我们致力于抛物度量空间 $\mathbb{R}^n\times[0,T]$ 上的算子 $\frac{\partial}{\partial t}-\Delta+V$ 的基本解的估计. 从现在开始，我们用 $\mu\left(0<\mu<\frac{3}{5}\right)$ 来代替上一节中的 a，那么上一节的结果仍然成立.

本节我们总假定对于某个 $q\geqslant\frac{n}{2\mu}\left(0<\mu<\frac{3}{5}\right)$，$V\in B_q$.

首先，我们将证明抛物型的 Cacciopoli 型不等式.

引理 5.3.1 （抛物型的 Cacciopoli 型不等式）

假设 $\frac{\partial}{\partial s}u-\triangle u+Vu=0$ 在 $B(x,r)$ 上成立，则

$$\int_{B(x,r/2)}|\nabla u|^2\mathrm{d}y+\int_{B(x,r/2)}V|u|^2\mathrm{d}y\leqslant\frac{C}{r^2}\int_{B(x,r)}|u|^2\mathrm{d}y\qquad(5.3.1)$$

对任意 $r>0$ 都成立.

证明： 选取 $\phi(y)\in C_0^\infty(B(x,r))$，使得

$$\phi(y)\equiv1\qquad y\in B(x,\frac{r}{2}),|\phi(y)|\leqslant1,$$

并且

$$\left|\frac{\partial^{\alpha}}{\partial y}\phi(y)\right|\leqslant C_{\alpha}r^{-|\alpha|},\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial s}\phi(y)\right|\leqslant C_{\alpha}r^{-2|\alpha|}.$$

方程两边乘 $\phi^2\mu$，再在 $B(x,r)$ 上积分. 运用分部积分公式，我们得到

$$\int_{B(x,r)}\phi^2 u\frac{\partial}{\partial s}u\,\mathrm{d}y-\int_{B(x,r)}\phi^2 u\triangle u\,\mathrm{d}y+\int_{B(x,r)}\phi^2 u^2 V\,\mathrm{d}y=0.$$

因为

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)}\phi^2 u\frac{\partial}{\partial s}u\,\mathrm{d}y&=\int_{B(x',r)}\left[\int_{|s-t|<r^2}\phi^2 u\frac{\partial u}{\partial s}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}y'\\&=-\int_{B(x',r)}\left[\int_{|s-t|<r^2}u\frac{\partial}{\partial s}(\phi^2 u)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}y'\\&=-2\int_{B(x,r)}\phi u^2\frac{\partial}{\partial s}\phi\,\mathrm{d}y-\int_{B(x,r)}\phi^2 u\frac{\partial}{\partial s}u\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{B(x,r)}\phi^2 u\frac{\partial}{\partial s}u\,\mathrm{d}y=-\int_{B(x,r)}\phi u^2\frac{\partial}{\partial s}\phi\,\mathrm{d}y.$$

那么

$$\begin{aligned}&\int_{B(x,r)}-\phi u^2\frac{\partial}{\partial s}\phi\,\mathrm{d}y-\int_{B(x,r)}\phi^2 u\triangle u\,\mathrm{d}y+\int_{B(x,r)}\phi^2 u^2 V\,\mathrm{d}y\\&=\int_{B(x,r)}-\phi u^2\frac{\partial}{\partial s}\phi\,\mathrm{d}y-\int_{|s-t|<r^2}\left[\int_{B(x',r)}\phi^2 u d(\nabla u)\right]\mathrm{d}s+\int_{B(x,r)}\phi^2 u^2 V\,\mathrm{d}y\\&=\int_{B(x,r)}-\phi u^2\frac{\partial}{\partial s}\phi\,\mathrm{d}y+\int_{B(x,r)}\nabla u\cdot\nabla(\phi^2 u)\,\mathrm{d}y+\int_{B(x,r)}\phi^2 u^2 V\,\mathrm{d}y\\&=\int_{B(x,r)}-\phi u^2\frac{\partial}{\partial s}\phi\,\mathrm{d}y+2\int_{B(x,r)}\phi\nabla u\cdot(u\nabla\phi)\,\mathrm{d}y+\int_{B(x,r)}|\nabla u|^2\\&\quad\phi^2\,\mathrm{d}y+\int_{B(x,r)}\phi^2 u^2 V\,\mathrm{d}y\\&=0.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{B(x,r)}|\nabla u|^2|\phi|^2\,\mathrm{d}y+\int_{B(x,r)}|\phi|^2|u|^2 V\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\int_{B(x,r)}|\phi|u^2\left|\frac{\partial}{\partial s}\phi\right|\mathrm{d}y+2\int_{B(x,r)}|\phi\nabla u\|u\nabla\phi|\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\leqslant\int_{B(x,r)}|\phi|u^2|\frac{\partial}{\partial s}\phi|\mathrm{d}y+2\left(\frac{1}{2}\int_{B(x,r)}|\phi\nabla u|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(2\int_{B(x,r)}|u\nabla\phi|^2\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\int_{B(x,r)}|\phi\|u^2\|\frac{\partial}{\partial s}\phi|\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{B(x,r)}|\phi|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}y+2\int_{B(x,r)}|u|^2|\nabla\phi|^2\mathrm{d}y.$$

因此

$$\int_{B(x,r)}|\nabla u|^2|\phi|^2\mathrm{d}y+\int_{B(x,r)}|\phi|^2|u|^2V\mathrm{d}y$$

$$\leqslant 2\int_{B(x,r)}|\phi\|u|^2|\frac{\partial}{\partial s}\phi|\mathrm{d}y+4\int_{B(x,r)}|u|^2|\nabla\phi|^2\mathrm{d}y.$$

因为在 $B\left(x,\frac{r}{2}\right)$上 $\phi(y)\equiv 1$ 并且 $|\phi(y)|\leqslant 1$，$\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial y}\phi(y)\right|\leqslant C_\alpha r^{-|\alpha|}$，$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial s}\phi(y)\right|\leqslant C_\alpha r^{-2|\alpha|}$. 我们得到

$$\int_{B(x,r/2)}|\nabla u|^2\mathrm{d}y+\int_{B(x,r/2)}V|u|^2\mathrm{d}y\leqslant\frac{C}{r^2}\int_{B(x,r)}|u|^2\mathrm{d}y.$$

从以上证明，我们能够看到该$\frac{r}{2}$不是本质的，我们可以用 $\epsilon r(0<\epsilon<1)$代替$\frac{r}{2}$，引理 5.3.1 及其证明仍然成立.

引理 5.3.2 假设$\frac{\partial}{\partial t}u-\triangle u+Vu=0$ 在球 $B(x_0,2R)$上对某个 $x_0=(x_0{}',t_0)\in\mathbb{R}^n\times[0,T]$，$R>0$，和 $Rm(x'_0,V)\geqslant 1$ 成立，则

$$\sup\{|u(x)|:x\in B(x_0,R)\}$$
$$\leqslant\frac{C_k}{\{1+Rm(x_0{}',V)\}^k}\left\{\frac{1}{R^{n+2}}\int_{B(x_0,2R)}|u(y)|^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}},$$

对于任何整数 $k>0$ 都成立，其中 C_k 仅依赖于 k、n 和式子(2.1.2)中的常数.

证明：首先，根据文[13]中第六章的定理 1.2，我们有

$$\sup\{|u(x)|:x\in B(x_0,R)\}\leqslant C\left\{\frac{1}{R^{n+2}}\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|u(y)|^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

现在设 $\eta(y)\in C_0^\infty(B(x_0,\frac{3}{2}R))$，使得在 $B(x_0,R)$ 上，$\eta(y)\equiv 1$，并且 $|\eta(y)|\leqslant 1$，和 $|\nabla\eta(y)|\leqslant\frac{C}{R}$. 对函数 $u\eta$ 运用引理 5.3.1，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(x_0,R)} m(x',V)^2|u(x)|^2\mathrm{d}x\\
=&\int_{B(x_0,R)} m(x',V)^2|\eta u|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant&\int_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} m(x',V)^2|\eta u|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant& C\left\{\int_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}|\nabla(\eta u)|^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}|\eta u|^2V\mathrm{d}x\right\}\\
\leqslant& C\left\{\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}\eta^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x+2\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|\eta\nabla\eta\|u\nabla u|\mathrm{d}x+\right.\\
&\left.\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|\nabla\eta|^2|u|^2\mathrm{d}x+\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}u^2V\mathrm{d}x\right\}\\
\leqslant& C\left\{\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{C}{R}\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|u\|\nabla u|\mathrm{d}x+\frac{C}{R^2}\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}\right.\\
&\left.|u|^2\mathrm{d}x+\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}u^2V\mathrm{d}x\right\}\\
\leqslant& C\left\{\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{C}{R}\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|u|^2\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|\nabla u|^2\right.\\
&\left.\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}+\frac{C}{R^2}\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|u|^2\mathrm{d}x+\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}u^2V\mathrm{d}x\right\}\\
\leqslant& C\left\{\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}u^2V\mathrm{d}x+\frac{C}{R^2}\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|u|^2\mathrm{d}x\right\}\\
\leqslant&\frac{C}{R^2}\int_{B(x_0,2R)}|u|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

最后的不等式运用了抛物型的 Cacciopoli 不等式. 根据引理 5.2.2 中的(c)，对于 $x\in B(x_0,R)$，我们有

$$
m(x',V)\geqslant\frac{Cm(x_0{}',V)}{\{1+|x'-x_0{}'|m(x_0{}',V)\}^{\frac{k_0}{k_0+1}}}\geqslant\frac{Cm(x_0{}',V)}{\{1+Rm(x_0{}',V)\}^{\frac{k_0}{k_0+1}}}.
$$

因为 $Rm(x'_0,V)\geqslant 1$，由此推出

$$\int_{B(x_0,R)}|u|^2\mathrm{d}x=\int_{B(x_0,R)}m(x',V)^2\frac{1}{m(x',V)^2}|u|^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{\{1+Rm(x_0{}',V)\}^{\frac{2k_0}{k_0+1}}}{m(x'_0,V)^2}\int_{B(x_0,2R)}m(x',V)^2|u|^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{C\{1+Rm(x_0{}',V)\}^{\frac{2k_0}{k_0+1}}}{R^2m(x'_0,V)^2}\int_{B(x_0,2R)}|u|^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{C}{\{1+Rm(x_0{}',V)\}^{\frac{2}{k_0+1}}}\int_{B(x_0,2R)}|u|^2\mathrm{d}x.$$

显然,通过重复上述讨论,我们有

$$\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|u|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{C_k}{\{1+Rm(x_0{}',V)\}^k}\int_{B(x_0,2R)}|u|^2\mathrm{d}x,\ \forall k>0.$$

因此

$$\sup\{|u(x)|:x\in B(x_0,R)\}\leqslant C\left\{\frac{1}{R^{n+2}}\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|u|^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\frac{C_k}{\{1+Rm(x_0{}',V)\}^k}\left\{\frac{1}{R^{n+2}}\int_{B(x_0,2R)}|u|^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

设 $\Gamma(x',t;y',s)$表示为抛物型薛定谔算子$\frac{\partial}{\partial t}-\triangle+V$ 的基本解.因为 $V\geqslant0$ 和 $V\in L^{\frac{n}{2\mu}}_{loc}$,众所周知(见[50]),

$$\Gamma(x',t;y',s)\leqslant\frac{C}{|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}\quad\forall x',y'\in\mathbb{R}^n;0\leqslant s<t\leqslant T.\tag{5.3.5}$$

这里常数 C 仅与维数 n 有关.

由于$V\in B_{\frac{n}{2\mu}}$蕴含着$V\in B_q$,其中某个 $q>\frac{n}{2\mu}$.下面的定理来自于引理 5.3.2 和式子(5.3.5).

定理 5.3.1 设 $V\in B_{\frac{n}{2\mu}}$,那么对于任意 $x',y'\in\mathbb{R}^n$; $0\leqslant s<t\leqslant T$,有

$$\Gamma(x', t; y', s) \leqslant \frac{C_k}{\{1+m(x',V)|x'-y'|\}^k} \frac{1}{|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}, \tag{5.3.6}$$

其中 C_k 是一个仅与 n、k 和式子(1.1.2)中的常数有关的常数.

证明:首先,存在 $R_1>0$,当 $R\geqslant R_1$ 时

$$\frac{C_k}{\{1+\frac{3}{2}Rm(x',V)\}^k}<\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{\frac{n+2}{2}}$$

成立.

因此,对于任意 $R\geqslant R_1$,根据引理 5.3.2,我们有

$$\begin{aligned}
&\sup\{|u(x)|:x\in B(x_0,\frac{3}{2}R)\}\\
&\leqslant\frac{C_k}{\{1+\frac{3}{2}Rm(x_0',V)\}^k}\left\{\frac{1}{(\frac{3}{2}R)^{n+2}}\int_{B(x_0,2R)}|u|^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\frac{C_k}{\{1+\frac{3}{2}Rm(x_0',V)\}^k}\left\{\frac{1}{R^{n+2}}\int_{B(x_0,\frac{3}{2}R)}|u|^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&+\frac{C_k}{\{1+\frac{3}{2}Rm(x_0',V)\}^k}\left\{\frac{1}{R^{n+2}}\int_{B(x_0,2R)/B(x_0,\frac{3}{2}R)}|u|^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\frac{1}{2}\sup\{|u(x)|:x\in B(x_0,\frac{3}{2}R)\}\\
&+\frac{C_k}{\{1+\frac{3}{2}Rm(x_0',V)\}^k}\left\{\frac{1}{R^{n+2}}\int_{B(x_0,2R)/B(x_0,\frac{3}{2}R)}|u|^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\frac{C_k}{\{1+\frac{3}{2}Rm(x_0',V)\}^k}\left\{\frac{1}{R^{n+2}}\int_{B(x_0,2R)/B(x_0,\frac{3}{2}R)}|u|^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

所以,对于 $\frac{3}{2}|x-y|\geqslant R_1$,根据式子(5.3.5),我们有

$$\begin{aligned}
&\Gamma(x',t;y',s)\\
&\leqslant\sup\{|\Gamma(z',\tau;y',s)|:z=(z',\tau)\in B(x,\frac{3}{2}|x-y|)\}
\end{aligned}$$

$$
\leqslant \frac{C_k}{\{1+\frac{3}{2}|x-y|m(x',V)\}^k}\left\{\frac{1}{|x-y|^{n+2}}\int_{\frac{3}{2}|x-y|\leqslant|z-x|\leqslant 2|x-y|}\right.
$$

$$
\left.|\Gamma(z',\tau;y',s)|^2\mathrm{d}z\right\}^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\leqslant \frac{C_k}{\{1+|x-y|m(x',V)\}^k}\left\{\frac{1}{|x-y|^{n+2}}\int_{(\frac{3}{2}|x-y|)^2\leqslant|\tau-t|\leqslant(2|x-y|)^2}\right.
$$

$$
\left.\frac{1}{|\tau-s|^{2\mu}}\mathrm{d}\tau\right\}^{\frac{1}{2}}\times\left\{\int_{\frac{3}{2}|x-y|\leqslant|z'-x'|\leqslant 2|x-y|}\frac{1}{|z'-y'|^{2n-4\mu}}\mathrm{d}z'\right\}^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\leqslant\frac{C_k}{\{1+|x-y|m(x',V)\}^k}\left\{\frac{1}{|x-y|^{n+2}}\frac{1}{(\frac{5}{4}|t-s|)^{2\mu}}\int_{|\tau-s|\leqslant 5|x-y|^2}1\mathrm{d}\tau\right\}^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\times\left\{\frac{1}{(\frac{1}{2}|x'-y'|)^{2n-4\mu}}\int_{|z'-y'|\leqslant 3|x-y|}1\mathrm{d}z'\right\}^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\leqslant\frac{C_k}{\{1+m(x',V)|x-y|\}^k}\ \frac{1}{|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}
$$

$$
\leqslant\frac{C_k}{\{1+m(x',V)|x'-y'|\}^k}\ \frac{1}{|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}.
$$

倒数第二个不等式用到了下面的事实：

$$
\frac{5}{4}|t-s|\leqslant(\frac{3}{2}|x-y|)^2-|t-s|\leqslant|\tau-t|-|t-s|\leqslant|\tau-s|
$$

$$
\leqslant|\tau-t|+|t-s|\leqslant 5|x-y|^2
$$

和

$$
\frac{1}{2}|x'-y'|=|z'-x'|-|y'-x'|\leqslant|z'-y'|
$$

$$
\leqslant|z'-x'|+|y'-x'|\leqslant 3|x-y|.
$$

如果 $R<R_1$，我们有

$$
\sup\{|u(x)|:x\in B(x_0,\frac{3}{2}R)\}
$$

$$
\leqslant\sup\{|u(x)|:x\in B(x_0,\frac{3}{2}R_1)\}
$$

$$
\leqslant\frac{C_k}{\{1+\frac{3}{2}R_1 m(x_0{}',V)\}^k}\left\{\frac{1}{R_1^{n+2}}\int_{B(x_0,2R_1)/B(x_0,\frac{3}{2}R_1)}|u|^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}
$$

$$\leqslant \frac{C_k}{\{1+\frac{3}{2}Rm(x_0{}',V)\}^k}\left\{\frac{1}{R^{n+2}}\int_{B(x_0,2R_1)/B(x_0,\frac{3}{2}R_1)}|u|^2\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

因为$\frac{3}{2}|x-y|\leqslant R_1=\frac{3}{2}|\bar{x}-\bar{y}|$，其中 $\bar{x}=(\overline{x'},\bar{t})$，$\bar{y}=(\overline{y'},\bar{s})$.

类似的，我们能够得到

$$\Gamma(x',t;y',s)\leqslant\frac{C_k}{\{1+m(x',V)|x'-y'|\}^k}\frac{1}{|\bar{t}-\bar{s}|^{\mu}|\overline{x'}-\overline{y'}|^{n-2\mu}}$$

$$\leqslant\frac{C_k}{\{1+m(x',V)|x'-y'|\}^k}\frac{1}{|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}.$$

这样就证明了定理 5.3.1.

§5.4　定理 5.1.1 的证明

本节我们要完成定理 5.1.1 的证明. 首先，我们给出下面的定理.

定理 5.4.1　设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2\mu}(0<\mu<\frac{3}{5})$，$V\in B_q$. 那么对于 $1\leqslant p\leqslant q$，我们有

$$\|V(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle+V)^{-1}f\|_{L^p}\leqslant C_p\|f\|_{L^p},\tag{5.4.1}$$

其中常数 C 仅与 n、T 和式子(2.1.1)中的常数有关.

证明：设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n\times[0,T])$，　$1\leqslant p\leqslant q$，以及

$$u(x)=u(x',t)=\int_0^t\int_{R^n}\Gamma(x',t;y',s)f(y',s)\mathrm{d}y'\mathrm{d}s.$$

记

$$\begin{aligned}&u(x',t)\\&=\int_0^t\left[\int_{|y'-x'|<r}\Gamma(x',t;y',s)f(y',s)\mathrm{d}y'\right]\mathrm{d}s\\&\quad+\int_0^t\left[\int_{|y'-x'|\geqslant r}\Gamma(x',t;y',s)f(y',s)\mathrm{d}y'\right]\mathrm{d}s\\&=u_1(x',t)+u_2(x',t),\end{aligned}$$

其中 $r=\dfrac{1}{m(x',V)}$.

根据反霍尔德类 B_q 的性质，对于某个 $q_0>q, V\in B_{q_0}$，所以我们有

$$u_1(x',t)=\int_0^t\Big[\int_{|y'-x'|<r}|f(y',s)|\frac{1}{|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}y'\Big]\mathrm{d}s$$
$$\leqslant\Big(\int_0^t\Big[\int_{|y'-x'|<r}|f(y',s)|^{q_0}\mathrm{d}y'\Big]\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{q_0}}$$
$$\times\Big(\int_0^t\Big[\int_{|y'-x'|<r}\Big(\frac{1}{|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}\Big)^{q'_0}\mathrm{d}y'\Big]\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{q'_0}}$$
$$\leqslant Cr^{2\mu-\frac{n}{q_0}}t^{1-\mu-\frac{1}{q_0}}\int_0^t\int_{|y'-x'|<r}|f(y',s)|^{q_0}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s^{\frac{1}{q_0}},$$

其中我们用到了霍尔德不等式和下面这个事实 $q_0>\dfrac{n}{2\mu}>\dfrac{1}{1-\mu}$.

这样

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|V(x')u_1(x',t)|^{q_0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t$$
$$\leqslant C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}V(x')^{q_0}r^{2\mu q_0-n}t^{q_0-\mu q_0-1}\Big(\int_0^t\int_{|y'-x'|<r}|f(y',s)|^{q_0}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t$$
$$\leqslant C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f(y',s)|^{q_0}\Big(\int_s^T\int_{|y'-x'|<r}V(x')^{q_0}m(x',V)^{n-2\mu q_0}t^{q_0-\mu q_0-1}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}y'\mathrm{d}s.$$

设 $R=\dfrac{1}{m(y',V)}$，对于 $|x'-y'|<\dfrac{1}{m(x',V)}$，则 $\dfrac{1}{m(x',V)}\sim\dfrac{1}{m(y',V)}$. 因此

$$\int_s^T\int_{|y'-x'|<r}V(x')^{q_0}m(x',V)^{n-2\mu q_0}t^{q_0-\mu q_0-1}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\int_s^T t^{q_0-\mu q_0-1}\mathrm{d}t\int_{|y'-x'|<CR}V(x')^{q_0}m(y',V)^{n-2\mu q_0}\mathrm{d}x'$$
$$\leqslant CR^{2\mu q_0}\Big[\Big(\frac{1}{(CR)^n}\int_{|y'-x'|<CR}V(x')\Big)^{q_0}\mathrm{d}x'^{\frac{1}{q_0}}\Big]^{q_0}$$
$$\leqslant CR^{2\mu q_0}\Big(\frac{1}{(CR)^n}\int_{|y'-x'|<CR}V(x')\mathrm{d}x'\Big)^{q_0}$$

$$\leqslant C\Big[\frac{1}{(CR)^{n-2\mu}}\int_{|y'-x'|<CR}V(x')\mathrm{d}x'\Big]^{q_0}$$
$$=C.$$

所以

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|V(x')u_1(x',t)|^{q_0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f(y',s)|^{q_0}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s=C\,\|f\|_{L_{q_0}}^{q_0}.$$

接下来,根据式子(5.2.7)

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|V(x')u_1(x',t)|\mathrm{d}x'\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}V(x')\Big(\int_0^t\int_{|y'-x'|<r}\frac{|f(y',s)|}{|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f(y',s)|\Big(\int_s^T\frac{1}{|t-s|^{\mu}}\mathrm{d}t\int_{|y'-x'|<\frac{1}{m(x',V)}}\frac{V(x')}{|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}x'\Big)\mathrm{d}y'\mathrm{d}s$$
$$\leqslant\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f(y',s)|\Big(\frac{1}{r^{n-2\mu}}\int_{|y'-x'|<\frac{1}{m(x',V)}}V(x')\mathrm{d}x'\Big)\mathrm{d}y'\mathrm{d}s$$
$$=C\,\|f\|_{L^1}.$$

所以,根据内插定理得到

$$\|Vu_1\|_p\leqslant C_p\,\|f\|_p,\,1\leqslant p\leqslant q_0.$$

要完成证明,根据定理 5.3.3 和霍尔德不等式

$$|u_2(x',t)|\leqslant C\int_0^t\int_{|y'-x'|\geqslant r}\frac{|f(y',s)|}{\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^k|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s$$
$$\leqslant C\Big(\int_0^t\int_{|y'-x'|\geqslant r}\frac{1}{\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^k|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\times\Big(\int_0^t\int_{|y'-x'|\geqslant r}\frac{|f(y',s)|^p}{\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^k|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant C\Big(t^{1-\mu}\int_{|y'-x'|\geqslant r}\frac{1}{m(x',V)^{1+2\mu}|x'-y'|^{n+1}}\mathrm{d}y'\Big)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\times\Big(\int_0^t\int_{|y'-x'|\geqslant r}\frac{|f(y',s)|^p}{\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^k|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\Big(Ct^{1-\mu}r^{1+2\mu}\int_r^{\infty}y'^{(n-1)}y'^{(-n-1)}\mathrm{d}y'\Big)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\times\Big(\int_0^t\int_{|y'-x'|\geqslant r}\frac{|f(y',s)|^p}{\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^k|t-s|^{\mu}|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant Ct^{\frac{1-\mu}{p'}}r^{\frac{2\mu}{p'}}$$

$$\times\left(\int_0^t\int_{|y'-x'|\geqslant r}\frac{|f(y',s)|^p}{\{1+|x'-y'|m(x'',V)\}^k|t-s|^\mu|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $1<p<q_0$ 以及 $r=\dfrac{1}{m(x',V)}$. 这样

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|V(x')u_2(x',t)|^p\mathrm{d}x'\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|f(y',s)|^p$$

$$\times\left\{\int_s^T\int_{|y'-x'|\geqslant r}\frac{t^{(1-\mu)(p-1)}r^{2\mu(p-1)}|V(x')|^p}{\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^k|t-s|^\mu|x'-y'|^{n-2\mu}}\right.$$

$$\left.\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s,$$

这里

$$\int_s^T\int_{|y'-x'|\geqslant r}\frac{t^{(1-\mu)(p-1)}r^{2\mu(p-1)}|V(x')|^p}{\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^k|t-s|^\mu|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t$$

$$=\int_s^T\frac{t^{(1-\mu)(p-1)}}{|t-s|^\mu}\mathrm{d}t$$

$$\times\int_{|y'-x'|\geqslant r}\frac{|V(x')|^p}{m(x',V)^{2\mu(p-1)}\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^k|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}x'.$$

现在考虑第二个积分. 固定 $y'\in\mathbb{R}^n$, 设 $R=\dfrac{1}{m(y',V)}$, 根据引理 5.2.3(b)和推论 5.2.4, 我们有

$$\int_{|y'-x'|\geqslant r}\frac{|V(x')|^p}{m(x',V)^{2\mu(p-1)}\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^k|x'-y'|^{n-2\mu}}$$

$\mathrm{d}x'$

$$\leqslant C\int_{|y'-x'|\geqslant CR}\frac{|V(x')|^p}{m(y',V)^{2\mu(p-1)}\{1+|x'-y'|m(x',V)\}^{k-2k_0\mu(p-1)}|x'-y'|^{n-2\mu}}\mathrm{d}x'$$

$$\leqslant C\int_{|y'-x'|\geqslant CR}\frac{|V(x')|^p}{m(y',V)^{2\mu(p-1)}\{1+|x'-y'|m(y',V)\}^{\frac{k-2k_0\mu(p-1)}{k_0+1}}|x'-y'|^{n-2\mu}}$$

$\mathrm{d}x'$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{j-1}CR\leqslant|y'-x'|\leqslant 2^jCR}\frac{|V(x')|^p}{R^{2\mu(1-p)}\{1+|x'-y'|R^{-1}\}^{k_1}|x'-y'|^{n-2\mu}}$$

$\mathrm{d}x'$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{j-1}CR\leqslant|y'-x'|\leqslant 2^{j}CR}\frac{|V(x')|^{p}}{R^{2\mu(1-p)}\{2^{j-1}C\}^{k_1}|2^{j-1}CR|^{n-2\mu}}\mathrm{d}x'$$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2^{j}CR)^{n}}\int_{2^{j-1}CR\leqslant|y'-x'|\leqslant 2^{j}CR}\frac{|V(x')|^{p}}{2^{j(k_1-2\mu)}R^{-2\mu p}}\mathrm{d}x'$$

$$=C\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{C_0^{j}}{(2^{j}R)^{n}}\int_{|y'-x'|\leqslant R}V(x')\mathrm{d}x'\Big)^{p}(2^{j})^{(-k_1+2\mu)}R^{2\mu p}$$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{R^{n-2\mu}}\int_{|y'-x'|\leqslant R}V(x')\mathrm{d}x'\Big)^{p}\Big[\Big(\frac{C_0}{2}\Big)^{p}\Big]^{j}(2^{(-k_1+2\mu)})^{j}$$

$$=C\Big(\frac{1}{R^{n-2\mu}}\int_{|y'-x'|\leqslant R}V(x')\mathrm{d}x'\Big)^{p}\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\Big(\frac{C_0}{2}\Big)^{p}2^{(-k_1+2\mu)}\Big]^{j}$$

$$\leqslant C,$$

这里我们取足够大的 k.

对第一个积分,显然 $\phi(s)=\int_{s}^{T}\frac{t^{(1-\mu)(p-1)}}{|t-s|^{\mu}}\mathrm{d}t$ 在闭区间$[0,T]$上连续,因此

$$|\phi(s)|\leqslant C.$$

由上述分析,我们得到

$$\int_{0}^{T}\int_{\mathbb{R}^{n}}|V(x')u_2(x',t)|^{p}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\leqslant C\|f\|_{L^p}^{p}.$$

该定理得到证明.

我们现在回忆抛物型 Calderón-Zygnmund 核的定义以及它们的 L^p 估计(见[49]).为了方便起见,我们赋予 $\mathbb{R}^n\times[0,T]$另外一种抛物度量 $d(x,y)=d(x-y)$,其中 $d(x)=(t+\sum_{i=1}^{n}x'^{2})^{\frac{1}{2}}$,这个度量与我们在第一节引入的抛物度量是等价的.

定义 5.4.1 我们称函数 K 是一个定义在赋予上述度量的抛物型空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的抛物型 Carderón—Zygnmund 核(PCZ 核),如果

(1)K 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上光滑;

(2)$K(rx',r^2t)=r^{-(n+2)}K(x',t),\ \forall r>0$;

(3)$\int_{d(x)=r}K(x)\mathrm{d}\sigma(x)=0,\ \forall r>0.$

Fabes 和 Riviére 在文[49]中证明了 PCZ 核满足下列积分的 Hörmander 条件,其与经典的 Carderón－zygnmund 核的条件类似.

$$\int_{S_y} |K(x-y)-K(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant C(k),\ \forall\, y \in \mathbb{R}^{n+1},$$

其中 $S_y=\{x \mid d(x,0)\geqslant 4d(y,0)\}$. 他们还证明了下面的定理.

定理 5.4.3[49]　对任意 $p\in(1,+\infty)$,存在正常数 $C=C(p,K)$,使得

$$\| Kf \|_p \leqslant C \| f \|_p. \tag{5.4.2}$$

我们定义算子 R_j 为

$$R_j f(x)=\int_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} \frac{y'_j}{d(y)} f(x-y)\,\mathrm{d}y \qquad f\in L^p_{\mathbb{R}^n\times[0,T]}. \tag{5.4.3}$$

显然,核 $K(x)=\dfrac{x'_j}{d(x)}$满足 PCZ 核的三个条件. 根据定理 5.4.3,我们有

$$\| R_j f \|_p \leqslant C \| f \|_p,\ j=1,2,\cdots,n.$$

而且我们还有

$$(R_j f)^\wedge(x) = -i\,\frac{x'_j}{d(x)} f^\wedge(x).$$

于是

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 f)^\wedge(x) &= \sum_{i,j=1}^n x'_i x'_j f^\wedge(x) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{x'_i x'_j}{t+\sum\limits_{i=1}^n x_i'^2}\Big(t+\sum_{i=1}^n x_i'^2\Big) f^\wedge(x) \\
&= -\sum_{i,j=1}^n \frac{-ix'_i}{d(x)} \frac{-ix'_j}{d(x)}\Big(t+\sum_{i=1}^n x_i'^2\Big) f^\wedge(x) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \Big(R_i R_j \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle\Big) f\Big]\Big)^\wedge(x).
\end{aligned}$$

这里 f 的傅立叶变换是定义在抛物型空间上的广义傅立叶变换. 所以

$$\begin{aligned}
&\|(\nabla^2 f)\|_p\\
&\leqslant C\|(\nabla^2 f)^\wedge\|_p\leqslant C\sum_{i,j=1}^n\left(\|R_iR_j\left[(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle)f\right]\right)^\wedge\|_p\\
&\leqslant C\sum_{i,j=1}^n\|R_iR_j\left[(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle)f\right]\|_p\leqslant C\sum_{i,j=1}^n C_iC_j\|(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle)f\|_p\\
&\leqslant C\|(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle)f\|_p.
\end{aligned}$$

我们现在可以给出定理 5.1.1 的证明.

设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2\mu}(0<\mu<\frac{3}{5})$,$V\in B_q$,根据定理 5.4.1,

$$\|V(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle+V)^{-1}f\|_{L^p}\leqslant C_p\|f\|_{L^p},1\leqslant p\leqslant q.$$

由此推出,当 $1\leqslant p\leqslant q$ 时,

$$\begin{aligned}
&\|(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle)(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle+V)^{-1}f\|_{L^p}\\
&\leqslant\|f\|_{L^p}+\|V(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle+V)^{-1}f\|_{L^p}\leqslant C_p\|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

于是,根据抛物型算子 R_j 的 L^p 有界性,对于 $1\leqslant p\leqslant q$,

$$\begin{aligned}
&\|\nabla^2(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle+V)^{-1}f\|_{L^p}\\
&\leqslant C_p\|(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle)(\frac{\partial}{\partial t}-\triangle+V)^{-1}f\|_{L^p}\leqslant C_p\|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

定理 5.1.1 的证明完成.

§5.5 一个抛物型薛定谔算子的 $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ 估计

本节我们考虑抛物型薛定谔算子在底空间($\mathbb{R}^{n+1}$)上的问题.最近,韩金晟和唐林[39]考虑了一些抛物型薛定谔算子在底空间($\mathbb{R}^{n+1}$)上的 $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$估计.

我们考虑 $n\geqslant 3$ 的抛物型空间 $\mathbb{R}^{n+1}$.补充给出下面的记号:

$$B(x_0',r)=\{y'\in\mathbb{R}^n:|y'-x_0'|<r\};|(x',t)|=\rho((x',t),(\mathbf{0},0)),$$

$$Q_r(x_0',t_0)=\{(x',t)\in\mathbb{R}^{n+1}:|x'-x_0'|<r,t_0-r^2<t\leqslant t_0\},$$

$$|Q_r(x_0',t_0)|=Cr^{n+2}.$$

这里 $V(x')$ 是一非零非负的势，它属于 B_q.

设 $\Gamma(x',t;y',s;\tau)$ 为抛物型薛定谔算子 $\partial_t-\Delta+V(x')+i\tau,\tau\in\mathbb{R}$ 的基本解.

我们主要依靠泛函计算和文[44]给出的抛物型薛定谔算子的基本解 $\Gamma(x',t;y',s;\tau)$ 的一个点态估计来证明本节的主要结论.

引理 A（见[44]） 假设 $V\in B_{\frac{n}{2}},\tau\in\mathbb{R},\forall k\in\mathbb{N},t>s$，我们有

$$\Gamma(x',t;y',s;\tau)\leqslant\frac{C_k(1+|\tau|^{\frac{1}{2}}\rho((x',t),(y',s)))^{-k}}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k}\cdot\frac{e^{-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}}}{(t-s)^{\frac{n}{2}}}.$$

由于

$$\frac{e^{-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}}}{(t-s)^{\frac{n}{2}}}\leqslant C\frac{1}{\rho((x',t),(y',s))^n},\forall(x',t),(y',s)\in\mathbb{R}^{n+1}(t>s),$$

我们还有

$$\Gamma(x',t;y',s;\tau)\leqslant\frac{C_k(1+|\tau|^{\frac{1}{2}}\rho((x',t),(y',s)))^{-k}}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^n}.\tag{5.5.1}$$

我们的主要定理回答了问题 6.

定理 5.5.1 假设对某个 $q\geqslant\frac{n}{2},V\in B_q$，则

$$\|(\partial_t-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}f\|_{L^p}\leqslant C\|f\|_{L^p},(2q)'\leqslant p<\infty.$$

证明：为方便起见，这里记 $T=(\partial_t-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}$ 和

$$Tf(x',t)=\iint_{\mathbb{R}^{n+1}}K(x',t;y',s)f(y',s)\mathrm{d}y'\mathrm{d}s.$$

由泛函运算，可有

$$(\partial_t-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}(\partial_t-\Delta+V+i\tau)^{-1}\mathrm{d}\tau.\tag{5.5.1}$$

因此

$$Tf(x',t)=\iint_{\mathbb{R}^{n+1}}K_2(x',t;y',s)f(y',s)\mathrm{d}y'\mathrm{d}s=(\partial_t-\Delta+$$

$$V)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}f(x',t)$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}(\partial_t-\Delta+V+i\tau)^{-1}(V^{\frac{1}{2}}f)(x',t)\mathrm{d}\tau$$

$$=\iint_{\mathbb{R}^{n+1}}\Big[-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(x',t;y',s;\tau)V^{\frac{1}{2}}(y')$$

$$\mathrm{d}\tau\Big]f(y',s)\mathrm{d}y'\mathrm{d}s.$$

于是我们得到

$$K(x',t;y',s)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(x',t;y',s;\tau)\mathrm{d}\tau V^{\frac{1}{2}}(y'). \tag{5.5.2}$$

当 $k>2$,我们有

$$\int_{\mathbb{R}}|\tau|^{-\frac{1}{2}}\{1+|\tau|^{\frac{1}{2}}\rho((x',t),(y',s))\}^{-k}\mathrm{d}\tau\leqslant\frac{C_k}{\rho((x',t),(y',s))}. \tag{5.5.3}$$

事实上,

$$\int_{\mathbb{R}}|\tau|^{-\frac{1}{2}}\{1+|\tau|^{\frac{1}{2}}\rho((x',t),(y',s))\}^{-k}\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{|\tau|\leqslant\rho((x',t),(y',s))^{-2}}+\int_{|\tau|>\rho((x',t),(y',s))^{-2}}|\tau|^{-\frac{1}{2}}\{1+|\tau|^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho((x',t),(y',s))\}^{-k}\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant\int_{|\tau|\leqslant\rho((x',t),(y',s))^{-2}}|\tau|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\tau+\int_{|\tau|>\rho((x',t),(y',s))^{-2}}|\tau|^{-\frac{k+1}{2}}$$

$$\rho((x',t),(y',s))^{-k}\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant\frac{C_k}{\rho((x',t),(y',s))}.$$

由引理 A 和(5.5.3)式可得

$$|K_2(x',t;y',s)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\tau|^{-\frac{1}{2}}\frac{C_k\{1+|\tau|^{\frac{1}{2}}\rho((x',t),(y',s))\}^{-k}}{\{1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s))\}^k}\frac{e^{-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}}}{(t-s)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{d}\tau V(y')^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C_k\int_{\mathbb{R}}|\tau|^{-\frac{1}{2}}\{1+|\tau|^{\frac{1}{2}}\rho((x',t),(y',s))\}^{-k}\mathrm{d}\tau$$

$$\times\frac{1}{\{1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s))\}^k\rho((x',t),(y',s))^n}V(y')^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{C_k}{\{1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s))\}^k\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}V(y')^{\frac{1}{2}}.$$

根据第二章第一节性质二，对某个 $q\geqslant\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，存在某个 $q_0>\frac{n}{2}$，使得 $V\in B_{q_0}$. 令 $r=\frac{1}{m(x',V)}$，以及 $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{2q_0}=1$，可得

$$\begin{aligned}
&|T_2 f(x',t)|\\
&\leqslant C_k\iint_{\mathbb{R}^{n+1}}\frac{V^{1/2}(y')|f(y',s)|\mathrm{d}y'\mathrm{d}s}{\{1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s))\}^k\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}\\
&\leqslant C_k\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(2^ir)}{(1+2^j)^k}\Big(\frac{1}{(2^jr)^{n+2}}\iint_{2^{j-1}r\leqslant\rho((x',t),(y',s))<2^jr}V^{1/2}(y')\\
&|f(y',s)|\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big)\\
&\leqslant C_k\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(2^ir)}{(1+2^j)^k}\Big\{\frac{1}{(2^jr)^{n+2}}\iint_{Q_{2^jr}(x',t)}V^{q_0}(y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big\}^{\frac{1}{2q_0}}\\
&\times\Big\{\frac{1}{(2^jr)^{n+2}}\iint_{Q_{2^jr}(x',t)}|f(y',s)|^{p_0}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big\}^{\frac{1}{p_0}}\\
&\leqslant C_k\{M(|f|^{p_0})(x',t)\}^{\frac{1}{p_0}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(2^jr)}{(1+2^j)^k}\Big\{\frac{1}{(2^jr)^n}\int_{B(x',2^jr)}V(y')\mathrm{d}y'\Big\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

注意到，由(2.1.3)和第二章第二节性质二，如果 $j\leqslant 0$，

$$(2^jr)\Big\{\frac{1}{(2^jr)^n}\int_{B(x',2^jr)}V(y')\mathrm{d}y'\Big\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\Big\{\Big(\frac{r}{2^jr}\Big)^{\frac{n}{q_0}-2}\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x',r)}V(y')\mathrm{d}y'\Big\}^{\frac{1}{2}}\leqslant C(2^j)^{1-\frac{n}{2q_0}}.$$

根据双倍条件(2.1.2)，如果 $j>0$，

$$(2^jr)\Big\{\frac{1}{(2^jr)^n}\int_{B(x',2^jr)}V(y')\mathrm{d}y'\Big\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\Big\{\frac{1}{(2^jr)^{n-2}}C_0^j\int_{B(x',r)}V(y')\mathrm{d}y'\Big\}^{\frac{1}{2}}\leqslant C(2^j)^{k_0},$$

其中 $k_0=2-n+\log_2 C_0$.

因此，选择充分大的 k，我们得到

$$|Tf(x',t)|\leqslant C_k\{M(|f|^{p_0})(x',t)\}^{\frac{1}{p_0}}. \tag{5.5.4}$$

故由 Hardy-Littlewood 极大函数 M 的有界性可得

$$\|(\partial_t-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}f\|_p\leqslant C\|f\|_p,(2q)'\leqslant p<\infty.$$

证明完毕.

第六章　一致抛物型算子在加权 L^p 空间和 Morrey 空间上的估计

§6.1　引言

本章我们考虑比具有反霍尔德类势的抛物型薛定谔算子更为一般的一类具有反霍尔德类势的一致抛物型算子. 目前,关于这方面的研究不是很多,主要是 K. Kurata 等做了一些这方面的研究. K. Kurata 和 S. Sugano 在文[42]中研究了一致椭圆算子 $L_1=-\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j)+V(x)$,其中 $V(x)$ 属于某种反霍尔德类. 当 $A(x)=(a_{i,j}(x))$ 是单位矩阵的时候,L_1 就是第三章和第四章中的薛定谔算子. 设 $a_{i,j}(x)$ 是满足一定下列条件的可测函数.

(A01) 存在常数 $\lambda\in(0,1]$,使得

$$a_{i,j}(x)=a_{j,i}(x),\lambda|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x)\xi_i\cdot\xi_j\leqslant\lambda^{-1}|\xi|^2,(x,\xi\in\mathbb{R}^n);$$

(A02) 存在常数 $\alpha\in(0,1]$ 和 $K>0$,使得

$$\|a_{i,j}\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}\leqslant K.$$

K. Kurata 和 S. Sugano[42]证明了 $T_{01}=VL_1^{-1}$,$T_{02}=V^{\frac{1}{2}}\nabla L_1^{-1}$ 和 $T_{03}=\nabla^2L_1^{-1}$ 的估计以及它们在加权 L^p 和 Morrey 空间上的有界性.

我们考虑的一致抛物型算子是

$$L=L_0+V=\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i(a_{i,j}(x',t)\partial_j)+V(x'),$$

其中 $V\in B_q$. 这里我们仍然是在抛物型空间 $\mathbb{R}^{n+1}(n\geqslant3)$ 上来讨论. 我们假定 $a_{i,j}(x',t)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}(n\geqslant3)$ 上的一个可测函数,它满足下面的条件:

(A1) 存在常数 $\lambda\in(0,1]$,使得

$$a_{i,j}(x',t)=a_{j,i}(x',t),$$

$$\lambda|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x',t)\xi_i\cdot\xi_j\leqslant\lambda^{-1}|\xi|^2,((x',t)\in\mathbb{R}^{n+1},\xi\in\mathbb{R}^n);$$

(A2)存在常数 $\alpha\in(0,1]$和 $K>0$,使得

$$\|a_{i,j}\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^{n+1})}\leqslant K.$$

我们记 $A(x',t)$为由$(a_{i,j}(x',t))$组成的矩阵.如果 $A(x',t)$满足条件(A1),我们称 L 满足一致抛物条件.

当 $A(x',t)$是单位矩阵时,L 就是第五章讨论的抛物型薛定谔算子(见[39]).

本章我们沿用第五章的记号.为方便起见,从此令 $T_1=VL^{-1}$,$T_2=V^{\frac{1}{2}}\nabla L^{-1}$,$T_3=V^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}$.本章的主要结果如下.

定理 6.1.1　设 T_1中的 $A(x',t)$满足(A1)条件,T_2中的 $A(x',t)$满足(A1)-(A2)条件,并且 $V\in B_\infty$.那么存在正常数 $C_k(k=1,2)$,使得

$$|T_kf(x',t)|\leqslant C_kM(|f|)(x',t)\qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}),k=1,2)$$

其中 $M(f)$是 Hardy-Littlewood 极大函数.

我们回忆抛物型空间$\mathbb{R}^{n+1}$中的 A_p权,加权 $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega dx'dt)$和 Morrey 空间的定义.

定义 6.1.1　设 $1\leqslant p<\infty$.

(a)对于一个非负函数 $\omega(x',t)$,我们称 $\omega\in A_p(1<p<\infty)$和 $\omega\in A_1$,如果 ω 分别满足

$$\left(\frac{1}{|Q|}\iint_Q\omega(y',s)dy'ds\right)\left(\frac{1}{|Q|}\iint_Q\omega(y',s)^{-\frac{1}{p-1}}dy'ds\right)^{p-1}\leqslant C,$$

和

$$\left(\frac{1}{|Q|}\iint_Q\omega(y',s)dy'ds\right)\leqslant C\inf_Q\omega,$$

对某个常数 C 以及对任意 $Q\subset\mathbb{R}^{n+1}$都成立.

(b)$L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega dx'dt)$空间是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$在范数$(\|f\|_{p,\omega}=\iint|f(x',t)|^p\omega(x',t)dx'dt)^{\frac{1}{p}}$下的完备化空间.

(c)设 $1\leqslant p\leqslant q<\infty$ 和 $f\in L_{loc}^p(\mathbb{R}^{n+1})$，我们称 f 属于 Morrey 空间 $M_p^q(\mathbb{R}^{n+1})$，如果存在常数 $C>0$ 使得

$$r^{-(n+2)}\iint_Q |f(y',s)|^p\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\leqslant Cr^{-\frac{(n+2)p}{q}}$$

对任意$(x',t)\in\mathbb{R}^{n+1}$和任意 $r>0$ 都成立. 显然，$M_p^p(\mathbb{R}^{n+1})=L^p(\mathbb{R}^{n+1})$.

如果 $\omega\in A_p$，$1<p<\infty$，众所周知，奇异积分和 Hardy-Littlewood 极大函数在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$和 Morrey 空间上是有界的. 因此定理 6.1.1 蕴含了下面推论.

推论 6.1.1　设 $A(x',t)$和 $V(x')$满足定理 6.1.1 中的假设. 设 $1<p<q<\infty$，$\omega(x',t)\in A_p$，那么 T_1 和 T_2 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$空间和 $M_p^q(\mathbb{R}^{n+1})$空间上有界.

注 6.1.1　一旦我们得到定理 6.1.1 中的估计，如果极大函数 $M(f)$在一个具有范数单调增加的空间 X 是有界的，那么 T_k，$k=1,2$，也在 X 上有界.

定理 6.1.2　(1)假设 $A(x',t)$满足(A1)条件，并且对某个 $q>\frac{n}{2}$，$V\in B_q$，那么存在常数 $C>0$，使得

$$|T_1^* f(x',t)|\leqslant CM(|f|^{q'})^{\frac{1}{q'}}(x',t)\qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})),$$

其中$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$.

(2)假设 $A(x',t)$满足(A1)－(A2)条件，当$\frac{n}{2}<q<n$，$V\in B_q$，那么存在常数 $C>0$，使得

$$|T_2^* f(x',t)|\leqslant CM(|f|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}(x',t)\qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})),$$

其中$\frac{1}{p_1}=1+\frac{1}{n}-\frac{3}{2q}$；当 $q>n$，$V\in B_q$，则有

$$|T_2^* f(x',t)|\leqslant CM(|f|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}}(x',t)\qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})),$$

其中$\frac{1}{p_1}=1-\frac{1}{2q}$.

推论 6.1.2　设 $A(x',t)$满足(A1)，$1<p<\infty$. 假设 $V\in B_q$，其中 q

$>\max'(\frac{n}{2},p)$，$\omega^{-\frac{1}{(p-1)}}\in A_{\frac{p'}{q'}}$. 则 T_1 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$ 上有界.

推论 6.1.3 设 $A(x',t)$ 满足(A1)－(A2)，$1<p<\infty$. 假设 $V\in B_q$. 当 $n>q>\frac{n}{2}$，令 $\frac{1}{p_1}=1+\frac{1}{n}-\frac{3}{2q}$，$1<p<p'_1$，$\omega^{-\frac{1}{(p-1)}}\in A_{\frac{p'}{p_1}}$. 则 T_2 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$ 上有界.

当 $n\leqslant q$，令 $\frac{1}{p_1}=1-\frac{1}{2q}$，$1<p<p'_1$，$\omega^{-\frac{1}{(p-1)}}\in A_{\frac{p'}{p_1}}$，则 T_2 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$ 上有界.

定理 6.1.3 假设 $A(x',t)$ 满足(A1)－(A2)条件，$V\in B_\infty$，那么存在常数 $C>0$，使得

$$|V(x')^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}f(x',t)|\leqslant CM(|f|)(x',t)\qquad (f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}))$$

其中 $M(f)$ 是 Hardy-Littlewood 极大函数.

推论 6.1.4 设 $A(x',t)$，$V(x')$ 满足定理 6.1.3 中的假设，$\omega\in A_p$，那么 $V^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$ 和 Morrey 空间上是有界的.

对于 $V\in B_q$，$q\geqslant\frac{n}{2}$，我们有下面的结果：

定理 6.1.4 假设 $A(x',t)$ 满足(A1)－(A2)条件，$V\in B_q$，$\frac{n}{2}\leqslant q<\infty$. 那么对于 $1<p<2q$，有

$$\|V^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}f\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\omega)},$$

其中 $\omega^{1-p'}\in A_{\frac{p'}{(2q)'}}$，$L^p(\omega)=L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$.

§6.2 基本解的估计

设 $\Gamma(x',t;y',s)$ 和 $\Gamma_0(x',t;y',s)$ 分别是算子 L 和 L_0 的基本解. 在(A1)－(A2)条件的假设下，众所周知(见[50])，存在 C_0，$C_1=C_1(n,\lambda)$，$C_2=C_2(n,\lambda,K)$，使得 $\forall\, x',y'\in\mathbb{R}^n$，$t>s$，成立

$$0\leqslant\Gamma_0(x',t;y',s)\leqslant C_1\frac{e^{-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}}}{(t-s)^{\frac{n}{2}}}\leqslant\frac{C_1}{\rho((x',t),(y',s))^n}\tag{6.2.1}$$

和

$$|\nabla_{x'}\Gamma_0(x',t;y',s)|\leqslant C_2\frac{e^{-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}}}{(t-s)^{\frac{n+1}{2}}}\leqslant\frac{C}{\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}.\tag{6.2.2}$$

K. Kurata[44]给出了 $\Gamma(x',t;y',s)$的估计. 由于 $V\in B_{\frac{n}{2}}$ 蕴含了文[44]中的条件$(V,0,0)$. 根据文[44]中的注 5 可把文[44]中的定理 1(a)写为

定理 Y[44]　设 $A(x',t)$满足(A1)条件,$V\in B_{\frac{n}{2}}$. 那么存在正常数 k_0 和 $C_j(j=0,1,2)$,使得对任意 $x',y'\in\mathbb{R}^n,t>s$,有

$$0\leqslant\Gamma(x',t;y',s)\leqslant C_1\exp(-C_2(1+m(x',V)^2(t-s))^{\frac{1}{2(k_0+1)}})\frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}}}\exp(-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}).$$

同理,文[44]中的推论 1(b)可写为

定理 Z[44]　设 $A(x',t)$满足(A1)条件,$V\in B_{\frac{n}{2}}$. 对任意整数 $k>0$,存在正常数 C_k 和 C_0,使得对任意 $x',y'\in\mathbb{R}^n,t>s$,有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\Gamma(x',t;y',s)\\&\leqslant\frac{C_k}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k}\frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}}}\exp(-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}).\end{aligned}$$

K. Kurara[44]还给出了下面几个有用的引理.

引理 6.2.1　(见[44]中引理 1)设 $u(x',t)$是 $L=0$ 在 $Q_{2r}(x'_0,t_0)$中的一个弱解. 那么存在正常数 C 使得

$$\sup_{Q_r(x'_0,t_0)}|u(x',t)|\leqslant C(\frac{1}{r^{n+2}}\iint_{Q_{\frac{3}{2}r}(x'_0,t_0)}|u(x',t)|^2\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}.$$

还有 Caccioppoli 型不等式.

引理 6.2.2　(见[44]中引理 3)设 $0<\delta<1$,$u(x',t)$是 $L=0$ 在 $Q_{2r}(x'_0,t_0)$中的一个弱解,那么存在正常数 C 使得

$$\sup_{t_0-(\sigma r)^2\leqslant t\leqslant t_0}\int_{B(x'_0,\sigma r)}|u(x',t)|^2\mathrm{d}x'+\iint_{Q_{\sigma r}(x'_0,t_0)}(|\nabla u|^2+V|u|^2)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{C}{(1-\sigma)^2 r^2} \iint_{Q_r(x_0',t_0)} |u|^2 \mathrm{d}x'\mathrm{d}t.$$

引理 6.2.3 （见[44]中定理 2）设 $u(x',t)$ 是 $L=0$ 在 $Q_{2r}(x_0',t_0)$ 中的一个弱解，$V\in B_{\frac{n}{2}}$，那么存在正常数 k_0，$C_j(j=1,2)$，使得

$$\sup_{Q_{\frac{r}{2}}(x_0',t_0)} |u(x',t)| \leqslant C_1 \exp\left(-C_2(1+rm(x_0',V))^{\frac{1}{(k_0+1)}}\right) \left(\frac{1}{r^{n+2}} \iint_{Q_r(x_0',t_0)} |u(x',t)|^2 \mathrm{d}x'\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

显然也有

$$\sup_{Q_{\frac{r}{2}}(x_0',t_0)} |u(x',t)| \leqslant \frac{C_k}{(1+rm(x_0',V))^k} \left(\frac{1}{r^{n+2}} \iint_{Q_r(x_0',t_0)} |u(x',t)|^2 \mathrm{d}x'\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.2.3}$$

引理 6.2.4(Fefferman－Phong 不等式) 设 $V\in B_{\frac{n}{2}}$，那么存在常数 $C>0$，使得

$$\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} |u(x',t)|^2 m(x',V)^2 \mathrm{d}x'\mathrm{d}t \leqslant C \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} (|\nabla u(x',t)|^2 + V(x')|u(x',t)|^2) \mathrm{d}x'\mathrm{d}t,$$

对任意 $u(x',t)\in C_0^1(\mathbb{R}^{n+1})$ 都成立.

我们需要一个类似(2.2.3)式的抛物型度量的结果.

引理 6.2.5 设 $V\in B_q$，$q>\frac{n}{2}$，$\forall(x',t),(y',s)\in\mathbb{R}^{n+1}$，存在常数 $c>0$ 和 $C>0$，使得

$$\begin{aligned} c(1+\rho((x',t),(y',s))m(y',V))^{\frac{1}{(k_0+1)}} &\leqslant 1+\rho((x',t),(y',s))m(x',V) \\ &\leqslant C(1+\rho((x',t),(y',s))m(y',V))^{k_0+1}. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

证明：先证(6.2.4)式的第一个不等式. 设 $r=\frac{1}{m(x',V)}$，$\rho((x',t),(y',s))\sim 2^j r$，$j\geqslant 1$. 否则 $|x'-y'|\leqslant\rho((x',t),(y',s))\leqslant r$. 根据第二章第二节性质三，显然(6.2.4)成立. $\forall z\in B(y',2^j r)$，则 $|z'-x'|\leqslant|z'-y'|+|y'-x'|\leqslant|z'-y'|+\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^{j+1}r$. 因此 $B(y',2^j r)\subset B(x',2^{j+1}r)$. 设 $0<r_1<r$ 和 $2^k r_1\sim 2^j r$. 那么根据(2.1.2)和(2.1.3)

有

$$\begin{aligned}\int_{B(y',r_1)} V(z')dz' &\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}\int_{B(y',2^k r_1)} V(z')\mathrm{d}z'\\ &\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}\int_{B(y',2^j r)} V(z')\mathrm{d}z'\\ &\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}\int_{B(x',2^{j+1} r)} V(z')\mathrm{d}z'\\ &\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}C_0^{j+1}\int_{B(x',r)} V(z')\mathrm{d}z'\\ &\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}C_0^{j+1}r^{n-2}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1^{n-2}}\int_{B(y',r_1)} V(z')dz' &\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}C_0^{j+1}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{n-2}\\ &\leqslant C(2^k)^{\frac{n}{q}-n}C_0^{j+1}\left(\frac{2^k}{2^j}\right)^{n-2}\\ &= C2^{j(2-n+\frac{n}{q}-1)}\left(\frac{2^k}{2^j}\right)^{\frac{n}{q}-2}C_0^{j+1}\\ &\leqslant C\left(2^{\frac{n}{q}-n}C_0\right)^j\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{n}{q}-2}\\ &\leqslant C\left(2^{\frac{n}{q}-n}C_0C_1^{\frac{n}{q}-2}\right)^j\\ &\leqslant \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

如果取 $r_1\leqslant C_1^{-j}r$，并且 C_1 是充分大，那么由 $\dfrac{n}{q}-2<0$ 得最后不等式. 因此根据 $m(x',V)$ 的定义，

$$\frac{1}{m(y',V)}\geqslant C_1^{-j}r.$$

从而

$$\begin{aligned}m(y',V)\leqslant C_1^j m(x',V) &= \left(2^j\right)^{\log_2 C_1} m(x',V) = \left(2^j r\,\frac{1}{r}\right)^{\log_2 C_1} m(x',V)\\ &\leqslant C\{1+\rho((x',t),(y',s))m(x',V)\}^{\log_2 C_1} m(x',V)\\ &= C\{1+\rho((x',t),(y',s))m(x',V)\}^{k_0} m(x',V).\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

这里只需取 $k_0=\log_2 C_1$.

我们断言

$$m(y',V)\geqslant c\frac{m(x',V)}{\{1+\rho((x',t),(y',s))m(x',V)\}^{\frac{k_0}{k_0+1}}}. \qquad (6.2.6)$$

同上原因,我们不妨假设 $\rho((x',t),(y',s))\geqslant\frac{1}{m(y',V)}$. 根据(6.2.5)

$$\begin{aligned}m(x',V)&\leqslant C\{1+\rho((x',t),(y',s))m(y',V)\}^{k_0}m(y',V)\\&\leqslant C\rho((x',t),(y',s))^{k_0}m(y',V)^{k_0+1},\end{aligned}$$

这样

$$m(y',V)\geqslant\frac{Cm(x',V)^{\frac{1}{k_0+1}}}{\rho((x',t),(y',s))^{\frac{k_0}{k_0+1}}}\geqslant\frac{Cm(x',V)}{\{1+\rho((x',t),(y',s))m(x',V)\}^{\frac{k_0}{k_0+1}}}.$$

由 $m(x',V)$ 和 $m(y',V)$ 的对称性可得

$$\begin{aligned}m(x',V)&\geqslant\frac{Cm(y',V)}{\{1+\rho((x',t),(y',s))m(y',V)\}^{\frac{k_0}{k_0+1}}}\\&=\frac{Cm(y',V)\{1+\rho((x',t),(y',s))m(y',V)\}^{\frac{1}{k_0+1}}}{1+\rho((x',t),(y',s))m(y',V)}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&C\{1+\rho((x',t),(y',s))m(y',V)\}^{\frac{1}{k_0+1}}\\&\leqslant\frac{m(x',V)}{m(y',V)}\{1+\rho((x',t),(y',s))m(y',V)\}\\&=\frac{m(x',V)}{m(y',V)}+\rho((x',t),(y',s))m(x',V)\\&\leqslant C\{1+\rho((x',t),(y',s))m(x',V)\}^{\frac{k_0}{k_0+1}}+C\rho((x',t),(y',s))m(x',V)\\&\leqslant\begin{cases}C\{2^{\frac{k_0}{k_0+1}}+\rho((x',t),(y',s))m(x',V)\} & ,\rho((x',t),(y',s))m(x',V)\leqslant 1\\ C(2^{\frac{k_0}{k_0+1}}+1)\rho((x',t),(y',s))m(x',V) & ,\rho((x',t),(y',s))m(x',V)\geqslant 1\end{cases}\\&\leqslant C\{1+\rho((x',t),(y',s))m(x',V)\}.\end{aligned}$$

最后,(6.2.4)的第二个不等式容易由第一个不等式和 $m(x',V)$ 与 $m(y',V)$ 的对称性得到.

我们要证明下面 $L=L_0+V$ 的基本解的关键估计.

定理 6.2.1 设 $k>0$ 是任一正整数.

(1)假设 $A(x',t)$ 满足(A1), $V\in B_{\frac{n}{2}}$. 则存在常数 $C_k>0$,使得 $\forall x',y'\in\mathbb{R}^n, t>s$,有

$$|\Gamma(x',t;y',s)|\leqslant\frac{C_k}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^n}. \tag{6.2.7}$$

(2)假设 $A(x',t)$ 满足(A1)-(A2), $V\in B_n$. 则存在常数 $C_k>0$,使得 $\forall x',y'\in\mathbb{R}^n, t>s$,有

$$|\nabla_{x'}\Gamma(x',t;y',s)|\leqslant\frac{C_k}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}. \tag{6.2.8}$$

注 6.2.1　由引理 6.2.5,我们可以将上面两个式子中的 $m(x',V)$ 和 $m(y',V)$ 互换.

证明:由定理 W 和

$$\frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}\right)\leqslant\frac{C}{\rho((x',t),(y',s))^n},$$

可得

$$|\Gamma(x',t;y',s)|\leqslant\frac{C_k}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^n}\qquad t>s.$$

下面我们将证明(6.2.8)式. 设 u 是 $Lu=0$ 在 $Q_{5R}(x_0',t_0)$ 中的一个弱解. 我们将证明

$$\sup_{Q_R(x_0',t_0)}|\nabla u|\leqslant\frac{C_k}{R}(1+Rm(x_0',V))^{k_0}\sup_{Q_{2R}(x_0',t_0)}|u|. \tag{6.2.9}$$

一旦证明了式(6.2.9),我们就可得到(6.2.8)式. 因为 $u(x',t)=\Gamma(x',t;y',s)$ 是 $Lu=0$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}/(y',s)$ 上的一个解. 要证明(6.2.9)式我们采取下面的策略. 对每个 $\epsilon>0$,考虑边值问题

$$L^\epsilon v=0\qquad ((x',t)\in Q_{4R}(x_0',t_0)),\ v-u\in W_0^{2,1}(Q_{4R}(x_0',t_0))$$

的解 u^ϵ. 其中 L^ϵ 是将一致抛物算子 L 的系数 $a_{i,j}(x',t)$ 和 $V(x')$ 换成 $a_{i,j}^\epsilon(x',t)$ 和 $V^\epsilon(x')$ 的一致抛物算子. 这里 $a_{i,j}^\epsilon$ 和 V^ϵ 分别是 $a_{i,j}$ 和 V 的光滑模函数. 容易看出, $a_{i,j}^\epsilon$ 也满足带有 λ 的(A1)条件,以及 $\|a_{i,j}^\epsilon\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^{n+1})}\leqslant K$. 进一步,众所周知, u^ϵ 都在 $Q_{4R}(x_0',t_0)$ 中光滑,并且

当 $\epsilon\to 0$ 时，u^ϵ 依 $W_2^{2,1}$ 的范数在 $Q_{3R}(x_0',t_0)$ 中一致收敛到 u. 首先我们证明对于 u^ϵ 的式(6.2.9)，然后取极限 $\epsilon\to 0$，就可以得到式(6.2.9).

为了简单起见，在下面的计算中我们记 $u=u^\epsilon$ 和 $L=L^\epsilon$，因此我们现在假定 u 是 $Lu=0$ 在 $Q_{4R}(x_0',t_0)$ 上的光滑解. 令 $\eta_1(x')\in C_0^\infty(B(x_0',\frac{3}{2}R))$ 使得在 $B(x_0',\frac{5}{4}R)$ 上，$\eta_1\equiv 1$，并且 $|\nabla^j\eta_1|\leqslant\frac{C}{R^j}$，$j=1,2$. 再令 $\eta_2(t)\in C_0^\infty(t_0+(\frac{3}{2}R)^2\leqslant t\leqslant t_0)$，使得在区间 $(t_0+(\frac{5}{4}R)^2,t_0)$ 上，$\eta_2\equiv 1$，并且 $|\partial_t\eta_2|\leqslant\frac{C}{R^2}$. 设 $\eta(x',t)=\eta_1(x')\eta_2(t)$. 设 $\Gamma_0(x',t;y',s)$ 是 $L_0(=L_0^\epsilon)$ 在 $Q_{4R}(x_0',t_0)$ 上的基本解，则

$$
\begin{aligned}
&u(y',s)\eta(y',s)\\
&=\iint\Gamma_0(x',t;y',s)\Big(\partial_t(u\eta)-\sum_{i,j=1}^n\nabla_{x_i'}(a_{i,j}\nabla_{x_j'})(u\eta)\Big)(x',t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\\
&=\iint\Gamma_0(x',t;y',s)(\eta\partial_t u+u\partial_t\eta)(x',t)\\
&+\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x',t)\nabla_{x_i'}\Gamma_0(x',t;y',s)\nabla_{x_j'}(u\eta)(x',t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\\
&=\iint\Gamma_0(x',t;y',s)(\eta\partial_t u)(x',t)\\
&+\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x',t)\nabla_{x_i'}(\Gamma_0(x',t;y',s)\eta(x',t))\nabla_{x_j'}u(x',t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\\
&+\iint\Gamma_0(x',t;y',s)(u\partial_t\eta)(x',t)-\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x',t)\Gamma_0(x',t;y',s)\\
&\quad\nabla_{x_i'}\eta(x',t)\nabla_{x_j'}u(x',t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\\
&+\iint\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x',t)\nabla_{x_i'}\Gamma_0(x',t;y',s)\nabla_{x_j'}\eta(x',t)u(x',t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{6.2.10}
$$

注意到 $Lu=0$，则有

$$
\iint\Gamma_0(x',t;y',s)\eta\partial_t u+\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x',t)\nabla_{x_i'}(\Gamma_0(x',t;y',s)\eta(x',t))\nabla_{x_j'}u(x',t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t
$$

$$
=\iint \Gamma_0(x',t;y',s)\eta(x',t)\Big[\partial_t u(x',t)-\sum_{i,j=1}^{n}\nabla_{x_i'}(a_{i,j}(x',t)\nabla_{x_j'}u(x',t))\Big]\mathrm{d}x'\mathrm{d}t
$$

$$
=\iint \Gamma_0(x',t;y',s)(-V(x'))u(x',t)\eta(x',t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t.
$$

我们说明:这一部分也可以用一个严格的方式进行调整.运用所谓的光滑模函数 $\Gamma_0^\sigma(x',t;y',s)\in W_0^{2,1}(Q_{4R}(x_0',t_0))$,$\sigma>0$,来替代 $\Gamma_0(x',t;y',s)(\notin W_0^{2,1}(Q_{4R}(x'_0,t_0)))$,再取极限 $\sigma\to 0$ 即可.所以对任意 $(y',s)\in Q_R(x_0',t_0)$,我们有

$$
\begin{aligned}
\nabla_{y_k'}u(y',s)=&\iint \nabla_{y_k'}\Gamma_0(x',t;y',s)(-V(x'))u(x',t)\eta(x',t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\\
&+\iint\Big[\nabla_{y_k'}\Gamma_0(x',t;y',s)(u\partial_t\eta)(x',t)\\
&-\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x',t)\nabla_{y_k'}\Gamma_0(x',t;y',s)\nabla_{x_i'}\eta(x',t)\nabla_{x_j'}u(x',t)\Big]\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\\
&+\iint\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}(x',t)\nabla_{y_k'}\nabla_{x_i'}\Gamma_0(x',t;y',s)\nabla_{x_j'}\eta(x',t)u(x',t)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t. \qquad (6.2.11)
\end{aligned}
$$

众所周知[50]

$$
|\nabla_{y_k'}\nabla_{x_i'}\Gamma_0(x',t;y',s)|\leqslant C\frac{e^{-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}}}{(t-s)^{\frac{n+2}{2}}}\leqslant\frac{C}{\rho((x',t),(y',s))^{n+2}},
$$

这里的常数 C 只与常数 λ 和霍尔德连续模常数 K 有关.于是对于 $(y',s)\in Q_R(x_0',t_0)$,我们有

$$
\begin{aligned}
|\nabla u(y',s)|\leqslant& C\int_s^\infty\int_{B(x_0',3R/2)}V(x')\frac{e^{-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}}}{(t-s)^{\frac{n+1}{2}}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\sup_{Q_{3R/2}(x_0',t_0)}|u|\\
&+\iint_{5R/4\leqslant\rho((x_0',t_0),(y',s))<3R/2}\frac{C|u|}{R^2\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\\
&+\iint_{5R/4\leqslant\rho((x_0',t_0),(y',s))<3R/2}\frac{C|\nabla u(x',t)|}{R\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$\leqslant C\int_{s}^{\infty}\int_{B(x_0',3R/2)}\frac{V(x')}{|x'-y'|^{n-1}}\frac{e^{-C_0\frac{|x'-y'|^2}{t-s}}}{(\frac{|x'-y'|^2}{t-s})^2}(\frac{|x'-y'|^2}{t-s})^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\frac{|x'-y'|^2}{(t-s)^2}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\sup_{Q_{3R/2}(x_0',t_0)}|u|$$

$$+\frac{C}{R^{n+3}}\iint_{Q_{3R/2}(x_0',t_0)}|u(x',t)|\mathrm{d}x'\mathrm{d}t$$

$$+C\Big(\frac{1}{R^{n+2}}\iint_{Q_{3R/2}(x_0',t_0)}|\nabla u(x',t)|^2\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\int_{B(x_0',3R/2)}\frac{V(x')}{|x'-y'|^{n-1}}\mathrm{d}x'\int_0^{\infty}e^{-C_0r}r^{\frac{n+1}{2}-2}\mathrm{d}r\sup_{Q_{3R/2}(x_0',t_0)}|u|+\frac{C}{R}\sup_{Q_{2R}(x_0',t_0)}|u|$$

$$=C\int_{B(x_0',3R/2)}\frac{V(x')}{|x'-y'|^{n-1}}\mathrm{d}x'\sup_{Q_{3R/2}(x_0',t_0)}|u|+\frac{C}{R}\sup_{Q_{2R}(x_0',t_0)}|u|.\quad(6.2.12)$$

这里我们对倒数第三式的第三项用到了 Caccioppoli 型不等式，还用到了在区域 $5R/4\leqslant\rho((x_0',t_0),(y',s))<3R/2$，有 $R/4\leqslant\rho((x',t),(y',s))$ 的事实. 所以我们推得 u^{ϵ} 满足式(6.2.12)，且常数 C 与 ϵ 无关. 因为由 $V\in B_p$ 知 $V\in L^p(B(x_0',5R))$，以及在 $L^p(B(x_0',5R))$ 中，$V^{\epsilon}\to V$. 根据式(6.2.12)我们得到 u^{ϵ} 在 $C^{2,1}(Q_R(x_0',t_0))$ 中收敛到 u. 因此 u 也满足式(6.2.12). 现在我们来完成式(6.2.9)的证明. 因为 $B(x_0',3R/2)\subset B(y',5R/2)\subset B(x_0',7R/2)$，由式(2.1.5)，所以

$$\int_{B(x_0',3R/2)}\frac{V(x')}{|x'-y'|^{n-1}}\mathrm{d}x'\leqslant\frac{C}{R^{n-1}}\int_{B(y',5R/2)}V(x')\mathrm{d}x'$$

$$\leqslant\frac{C}{R^{n-1}}\int_{B(x_0',7R/2)}V(x')\mathrm{d}x'.$$

于是我们可以根据式(2.2.4)得到所要证的估计式(6.2.9).

由式(6.2.3)、(6.2.7)及式(6.2.9)，我们容易得到式(6.2.8).

利用上面的结论，我们可以得到下面的推论 6.2.5. 设 $\Gamma(x',t;y',s;\lambda)$ 和 $\Gamma_0(x',t;y',s;\lambda)$ 分别是 $L+\lambda$ 和 $L_0+\lambda$ 的基本解. 由第二章第二节的性质八和性质九，根据定理 6.2.1，容易得到下面的推论.

推论 6.2.5 设 $k>0$ 是一个整数，$\lambda>0$.

(1)假设 $A(x',t)$ 满足(A1)条件，$V\in B_{\frac{n}{2}}$. 则存在常数 C_k 使得

$$|\Gamma(x',t;y',s;\lambda)|\leqslant\frac{C_k(1+\lambda^{\frac{1}{2}}\rho((x',t),(y',s)))^{-k}}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^n},t>s.\tag{6.2.13}$$

(2)假设 $A(x',t)$ 满足(A1)－(A2)条件，$V\in B_n$，则存在常数 C_k，使得

$$|\nabla_{x'}\Gamma(x',t;y',s;\lambda)|\leqslant\frac{C_k(1+\lambda^{\frac{1}{2}}\rho((x',t),(y',s)))^{-k}}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^{n+1}},$$

$t>s.$ (6.2.14)

引理 6.2.6　假设 $A(x',t)$ 满足(A1)－(A2)条件，对某个 $n/2<q_0<n$，$V\in B_{q_0}$，设 u 是 $Lu=0$ 在 $B(x_0',5R)$ 上的一个弱解，则有

$$\left(\iint_{Q_R(x_0',t_0)}|\nabla u(x',t)|^{p_0}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\right)^{1/p_0}$$
$$\leqslant CR^{\frac{n}{q_0}-2+\frac{2}{p_0}}(1+Rm(x_0',V)^{k_0})\sup_{Q_{2R}(x_0',t_0)}|u|,$$

其中 $\frac{1}{p_0}=\frac{1}{q_0}-\frac{1}{n}$.

证明:设 u^ϵ 是在定理 6.2.1 的证明中的逼近解. 根据分数次奇异积分理论和式(2.2.4)，由式(6.2.12)中的 u^ϵ 得到

$$\left(\iint_{Q_R(x_0',t_0)}|\nabla u^\epsilon(y',s)|^{p_0}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p_0}}$$
$$\leqslant C\sup_{Q_{2R}(x_0',t_0)}|u^\epsilon|\left\{\iint_{Q_R(x_0',t_0)}\left[\frac{1}{R}+\int_{B(x_0',3R/2)}\frac{V^\epsilon(x')}{|x'-y'|^{n-1}}\mathrm{d}x'\right]^{p_0}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{p_0}}$$
$$\leqslant C\sup_{Q_{2R}(x_0',t_0)}|u^\epsilon|\left\{\frac{1}{R}R^{\frac{n+2}{p_0}}+R^{\frac{2}{p_0}}\left[\int_{B(x_0',R)}\left(\int_{B(x_0',3R/2)}\frac{V^\epsilon(x')}{|x'-y'|^{n-1}}\mathrm{d}x'\right)^{p_0}\mathrm{d}y'\right]^{\frac{1}{p_0}}\right\}$$
$$\leqslant C\sup_{Q_{2R}(x_0',t_0)}|u^\epsilon|\left[R^{\frac{n}{q_0}-2+\frac{2}{p_0}}+R^{\frac{n}{q_0}-2+\frac{2}{p_0}}\left(R^2\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(x_0',3R/2)}V^\epsilon(y')^{q_0}\mathrm{d}y'\right)^{\frac{1}{q_0}}\right)\right]$$
$$\leqslant C\sup_{Q_{2R}(x_0',t_0)}|u^\epsilon|R^{\frac{n}{q_0}-2+\frac{2}{p_0}}\left[1+\frac{1}{R^{n-2}}\int_{B(x_0',2R)}V^\epsilon(y')\mathrm{d}y'\right]$$

$$\leqslant CR^{\frac{n}{q_0}-2+\frac{2}{p_0}}(1+Rm(x_0',V)^{k_0})\sup_{Q_{2R}(x_0',t_0)}|u^\epsilon|.$$

取 $\epsilon\to 0$,我们可得到要证明的估计.

§6.3 主要定理的证明

首先我们给出定理 6.1.1 的证明.

定理 6.1.1 的证明:(1)我们先考虑算子 $T_1=VL^{-1}$. 由第二章第二节性质九,可知 $V\in B_\infty$ 蕴含 $V(x')\leqslant Cm(x',V)^2$. 因此由定理 6.2.1 的(1)可得

$$|T_1f(x',t)|\leqslant C\iint_{\mathbb{R}^{n+1}}m(x',V)^2|\Gamma(x',t;y',s)\|f(y',s)|\mathrm{d}y'\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C\iint_{\mathbb{R}^{n+1}}\frac{m(x',V)^2|f(y',s)|\mathrm{d}y'\mathrm{d}s}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^n}.$$

设 $r=\dfrac{1}{m(x',V)}$,那么我们可得到

$$|T_1f(x',t)|\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\iint_{2^{j-1}r<\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^jr}|f(y',s)|$$

$$\times\frac{1}{r^2(1+r^{-1}\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^n}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\iint_{Q_{2^jr}(x',t)}\frac{|f(y',s)|}{r^2(1+2^{j-1})^k(2^{j-1}r)^n}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s$$

$$=C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{2^{2j+n}}{(1+2^{j-1})^k}\frac{1}{(2^jr)^{n+2}}\iint_{Q_{2^jr}(x',t)}|f(y',s)|\mathrm{d}y'\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{2^{2j+n}}{(1+2^{j-1})^k}M(|f|)(x',t).$$

所以我们只需取 $k=3$ 就可以得到要证明的估计.

(2)其次,对于算子 $T_2=V^{1/2}\nabla L^{-1}$,由第二章第二节的性质九可知 $V\in B_\infty$ 蕴含 $V(x')\leqslant Cm(x',V)^2$. 根据定理 6.2.1 的(2)可得

$$
\begin{aligned}
|T_2 f(x',t)| &\leqslant C\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} m(x',V)\,|\nabla_{x'}\Gamma(x',t;y',s)|\,|f(y',s)|\,\mathrm{d}y'\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{m(x',V)\,|f(y',s)|\,\mathrm{d}y'\mathrm{d}s}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

设 $r=\dfrac{1}{m(x',V)}$,我们能够得到

$$
\begin{aligned}
|T_2 f(x',t)| &\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\iint_{2^{j-1}r<\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^j r} |f(y',s)| \\
&\quad\times\frac{1}{r(1+r^{-1}\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\iint_{Q_{2^j r}(x',t)}\frac{|f(y',s)|}{r(1+2^{j-1})^k(2^{j-1}r)^{n+1}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s \\
&= C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{2^{j+n+1}}{(1+2^{j-1})^k}\frac{1}{(2^j r)^{n+2}}\iint_{Q_{2^j r}(x',t)}|f(y',s)|\,\mathrm{d}y' \\
&\quad \mathrm{d}s \\
&\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{2^{j+n+1}}{(1+2^{j-1})^k}M(|f|)(x',t).
\end{aligned}
$$

所以只需取 $k=2$ 就可以得到我们所要证明的估计.

定理 6.1.2 的证明: 设 $r=\dfrac{1}{m(x',V)}$. 由定理 6.2.1 后面的注 6.2.1,我们有

$$
|\Gamma(y',s;x',t)|\leqslant\frac{C_k}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^n}.
$$

因此再运用霍尔德不等式,我们得到

$$
\begin{aligned}
|T_1^* f(x',t)| &\leqslant C\iint_{\mathbb{R}^{n+1}}|\Gamma(y',s;x',t)|V(y')|f(y',s)|\,\mathrm{d}y'\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\iint_{\mathbb{R}^{n+1}}\frac{V(y')|f(y',s)|\,\mathrm{d}y'\mathrm{d}s}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^n} \\
&\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\iint_{2^{j-1}r<\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^j r}V(y')|f(y',s)| \\
&\quad\times\frac{1}{(1+r^{-1}\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^n}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(2^jr)^2}{(1+2^{j-1})^k}\frac{1}{(2^jr)^{n+2}}\iint_{Q_{2^jr}(x',t)}V(y')|f(y',s)|dy'ds$$

$$\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(2^jr)^2}{(1+2^{j-1})^k}\left[\frac{1}{(2^jr)^{n+2}}\iint_{Q_{2^jr}(x',t)}V(y')^q dy'ds\right]^{\frac{1}{q}}\times\left[\frac{1}{(2^jr)^{n+2}}\iint_{Q_{2^jr}(x',t)}|f(y',s)|^{q'}dy'ds\right]^{\frac{1}{q'}}$$

$$\leqslant C[M(|f|^{q'}(x',t))]^{\frac{1}{q'}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(2^jr)^2}{(1+2^{j-1})^k}\left[\frac{1}{|B(x',2^jr)|}\int_{B(x',2^jr)}V(y')^q dy'\right]^{\frac{1}{q}}.$$

根据式(2.1.3)和第二章第一节性质八，如果 $j\leqslant 0$，

$$\frac{(2^jr)^2}{|B(x',2^jr)|}\int_{B(x',2^jr)}V(y')dy'$$

$$\leqslant C\left(\frac{r}{2^jr}\right)^{\frac{n}{q}-2}\frac{r^2}{|B(x',r)|}\int_{B(x',r)}V(y')dy'\leqslant C(2^j)^{2-\frac{n}{q}}.\quad(6.3.1)$$

根据双倍条件(2.1.2)，如果 $j>0$，

$$\frac{(2^jr)^2}{|B(x',2^jr)|}\int_{B(x',2^jr)}V(y')dy'$$

$$\leqslant C2^{2j}C_0^j2^{-jn}\frac{r^2}{|B(x',r)|}\int_{B(x',r)}V(y')dy'\leqslant C(2^j)^{k_0},\quad(6.3.2)$$

其中 $k_0=2-n+\log_2C_0$.

因此如果我们取 $k>k_0+1$，则可得

$$|T_1^*f(x',t)|\leqslant C[M(|f|^{q'})(x',t)]^{\frac{1}{q'}}.$$

(2)设 $r=\dfrac{1}{m(x',V)}$，$V\in B_q$. 考虑 $\dfrac{n}{2}<q<n$ 的情况. 我们选择 p_0 和 p_1，使得 $\dfrac{1}{p_0}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{p_1}=1-\dfrac{3}{2q}+\dfrac{1}{n}$，则

$$\frac{1}{p_0}+\frac{1}{2q}+\frac{1}{p_1}=1.$$

因此，由霍尔德不等式得

$$
\begin{aligned}
&|T_2^* f(x',t)| \\
&\leqslant C\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} |\nabla_{y'}\Gamma(y',s;x',t)| V^{\frac{1}{2}}(y') |f(y',s)| \mathrm{d}y'\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big(\iint_{2^{j-1}r<\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^j r} |\nabla_{y'}\Gamma(y',s;x',t)|^{p_0}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{p_0}} \\
&\quad\times C\Big(\iint_{\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^j r} V(y')^q\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2q}}\Big(\iint_{\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^j r} \\
&\quad |f(y',s)|^{p_1}(y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{p_1}}.
\end{aligned}
$$

由定理 6.2.1 的(a)和引理 6.2.6 得

$$
\begin{aligned}
&\Big(\iint_{2^{j-1}r<\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^j r} |\nabla_{y'}\Gamma(y',s;x',t)|^{p_0}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{p_0}} \\
&\leqslant C_k\frac{(2^j r)^{\frac{n}{q}-(n+2)+\frac{2}{p_0}}}{(1+2^j)^k}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
|T_2^* f(x',t)| &\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(2^j r)}{(1+2^j)^k}\frac{1}{(2^j r)^n}\int_{B(x',2^j r)} V(y')^q\mathrm{d}y'^{\frac{1}{2q}} \\
&\quad\times\Big(\frac{1}{(2^j r)^{n+2}}\iint_{\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^j r}|f(y',s)|^{p_1}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leqslant C\{M(|f|^{p_1})(x',t)\}^{\frac{1}{p_1}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(2^j r)}{(1+2^j)^k}\Big(\frac{1}{(2^j r)^n} \\
&\quad\int_{B(x',2^j r)} V(y')^q\mathrm{d}y'\Big)^{\frac{1}{2q}}.
\end{aligned}
$$

由式(6.3.1)和式(6.3.2)，选择充分大的 k，我们得到

$$
|T_2^* f(x',t)|\leqslant C\{M(|f|^{p_1})(x',t)\}^{\frac{1}{p_1}}.
$$

最后，我们来考虑 $q\geqslant n$ 的情况. 因为 B_q 的单调性质，我们可以假设 $V\in B_n$. 根据定理 6.2.1 的注 6.2.1，我们有

$$
|\nabla_{y'}\Gamma(y',s;x',t)|\leqslant\frac{C_k}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}. \tag{6.3.3}
$$

于是

$$
|T_2^* f(x',t)|\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{C_k}{(1+2^j)^k(2^j r)^{n+1}}\iint_{\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^j r} V^{\frac{1}{2}}(y')
$$

$$
\begin{aligned}
&|f(y',s)|\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(2^j r)}{(1+2^j)^k}\Big(\frac{1}{(2^j r)^n}\int_{B(x',2^j r)}V(y')^q\mathrm{d}y'\Big)^{\frac{1}{2q}}\\
&\quad\times\Big(\frac{1}{(2^j r)^{n+2}}\iint_{\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^j r}|f(y',s)|^{p_1}\mathrm{d}y'\\
&\quad\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{p_1}},
\end{aligned}
$$

其中$\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{2q}=1$.

所以,和$\dfrac{n}{2}\leqslant q<n$ 的情况的证明一样,我们得到

$$|T_2^* f(x',t)|\leqslant C\{M(|f|^{p_1})(x',t)\}^{\frac{1}{p_1}}.$$

证毕.

推论 6.1.2 的证明:令$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$,对于 $q'<p'$,显然当 $\omega^{\frac{-1}{p-1}}\in A_{\frac{p'}{q'}}$ 时,M 是在 $L^{\frac{p'}{q'}}(\mathbb{R}^{n+1},\omega^{\frac{-1}{p-1}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$上有界的.因此当 $1<p<q$ 时,T_1^* 是在 $L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1},\omega^{\frac{-1}{p-1}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$上有界的.根据对偶理论,我们得到 T_1 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$上的有界性.

推论 6.1.3 的证明:当 $n>q>\dfrac{n}{2}$,$\dfrac{1}{p_1}=1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{2q}$.令$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$,对于 $p_1<p'$,显然当 $\omega^{\frac{-1}{p-1}}\in A_{\frac{p'}{p_1}}$ 时,M 是在 $L^{\frac{p'}{p_1}}(\mathbb{R}^{n+1},\omega^{\frac{-1}{p-1}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$上有界的.因此当 $1<p<p'_1$ 时,T_2^* 是在 $L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1},\omega^{\frac{-1}{p-1}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$上有界的.根据对偶理论,我们得到 T_2 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$上的有界性.当 $n\leqslant q$ 时,$\dfrac{1}{p_1}=1-\dfrac{1}{2q}$,$1<p<p'_1$.对于 $p_1<p'$,显然当 $\omega^{\frac{-1}{p-1}}\in A_{\frac{p'}{p_1}}$ 时,M 是在 $L^{\frac{p'}{p_1}}(\mathbb{R}^{n+1},\omega^{\frac{-1}{p-1}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$上有界的.因此当 $1<p<p'_1$ 时,T_2^* 是在 $L^{p'}(\mathbb{R}^{n+1},\omega^{\frac{-1}{p-1}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$上有界的.根据对偶理论,我们得到 T_2 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega\mathrm{d}x'\mathrm{d}t)$上的有界性.

定理 6.1.3 的证明:通过泛函运算,我们有

$$L^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda^{-\frac{1}{2}}(L+\lambda)^{-1}\mathrm{d}\lambda.$$

这样

$$\begin{aligned}T_3 f(x',t)&=V^{\frac{1}{2}}(x')L^{-\frac{1}{2}}f(x',t)\\&=\frac{V^{\frac{1}{2}}(x')}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda^{-\frac{1}{2}}(L+\lambda)^{-1}f(x',t)\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{V^{\frac{1}{2}}(x')}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^{n+1}}\int_0^{\infty}\lambda^{-\frac{1}{2}}\Gamma(x',t;y',s;\lambda)\mathrm{d}\lambda f(y',s)\mathrm{d}y'\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

当 $k>2$ 时，我们有

$$\int_0^{\infty}\lambda^{-\frac{1}{2}}\{1+\lambda^{\frac{1}{2}}\rho((x',t),(y',s))\}^{-k}\mathrm{d}\lambda\leqslant\frac{C_k}{\rho((x',t),(y',s))}.\tag{6.3.4}$$

事实上，

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\lambda^{-\frac{1}{2}}\{1+\lambda^{\frac{1}{2}}\rho((x',t),(y',s))\}^{-k}\mathrm{d}\lambda\\&=\Big(\int_{\lambda\leqslant\rho((x',t),(y',s))^{-2}}+\int_{\lambda>\rho((x',t),(y',s))^{-2}}\Big)\lambda^{-\frac{1}{2}}\{1+\lambda^{\frac{1}{2}}\rho((x',t),(y',s))\}^{-k}\mathrm{d}\lambda\\&\leqslant\int_{\lambda>\rho((x',t),(y',s))^{-2}}\lambda^{-\frac{k+1}{2}}\rho((x',t),(y',s))^{-k}\mathrm{d}\lambda\\&\quad+\int_{\lambda\leqslant\rho((x',t),(y',s))^{-2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda\\&\leqslant\frac{C_k}{\rho((x',t),(y',s))}.\end{aligned}$$

设 $r=\dfrac{1}{m(x',V)}$. 根据(6.2.13)和(6.3.4)可得

$$\begin{aligned}&|T_3 f(x',t)|\\&\leqslant C_k\iint_{\mathbb{R}^{n+1}}\frac{V^{\frac{1}{2}}(x')|f(y',s)|}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\\&\leqslant C_k\iint_{\mathbb{R}^{n+1}}\frac{m(x',V)|f(y',s)|}{(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\\&=C_k\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\iint_{2^{j-1}r<\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^j r}|f(y',s)|\\&\quad\times\frac{1}{r(1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s)))^k\rho((x',t),(y',s))^{n+1}}\mathrm{d}y'\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\leqslant C_k \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{(2^j)^{n+2}}{(1+2^{j-1})^k (2^{j-1})^{n+1}} \frac{1}{(2^j r)^{n+2}} \iint_{\rho((x',t),(y',s))\leqslant 2^j r} |f(y',s)| \mathrm{d}y' \mathrm{d}s$$

$$\leqslant C_k \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{2^j}{(1+2^j)^k} Mf(x',t) \leqslant C_k Mf(x',t),$$

其中取 $k>2$ 即可.

定理 6.1.4 的证明：根据定理 6.1.3 的证明，我们有

$$|T_2^* f(x',t)|$$

$$\leqslant C_k \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{V^{1/2}(y')|f(y',s)|\mathrm{d}y'\mathrm{d}s}{\{1+m(x',V)\rho((x',t),(y',s))\}^k \rho((x',t),(y',s))^{n+1}}$$

$$\leqslant C_k \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(2^i r)}{(1+2^j)^k} \frac{1}{(2^j r)^{n+2}} \iint_{2^{j-1} r\leqslant\rho((x',t),(y',s))<2^j r} V^{1/2}(y')|f(y',s)|\mathrm{d}y'\mathrm{d}s$$

$$\leqslant C_k \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(2^i r)}{(1+2^j)^k} \left\{ \frac{1}{(2^j r)^{n+2}} \iint_{Q_{2^j r}(x',t)} V^{q_0}(y')\mathrm{d}y'\mathrm{d}s \right\}^{\frac{1}{2q_0}}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(2^j r)^{n+2}} \iint_{Q_{2^j r}(x',t)} |f(y',s)|^{p_0} \mathrm{d}y'\mathrm{d}s \right\}^{\frac{1}{p_0}}$$

$$\leqslant C_k \{M(|f|^{p_0})(x',t)\}^{\frac{1}{p_0}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(2^j r)}{(1+2^j)^k} \left\{ \frac{1}{(2^j r)^n} \int_{B(x',2^j r)} V(y')\mathrm{d}y' \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

注意到，由式(2.1.3)和第二章第二节性质二，如果 $j\leqslant 0$，

$$(2^j r)\left\{ \frac{1}{(2^j r)^n} \int_{B(x',2^j r)} V(y')\mathrm{d}y' \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left\{ \left(\frac{r}{2^j r}\right)^{\frac{n}{q_0}-2} \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(x',r)} V(y')\mathrm{d}y' \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C(2^j)^{1-\frac{n}{2q_0}}.$$

根据双倍条件(2.1.2)，如果 $j>0$，

$$(2^j r)\left\{ \frac{1}{(2^j r)^n} \int_{B(x',2^j r)} V(y')\mathrm{d}y' \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left\{ \frac{1}{(2^j r)^{n-2}} C_0^j \int_{B(x',r)} V(y')\mathrm{d}y' \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C(2^j)^{k_0},$$

其中 $k_0=2-n+\log_2 C_0$.

因此，选择充分大的 k，我们得

$$|T_2^* f(x',t)| \leqslant C_k \{M(|f|^{p_0})(x',t)\}^{\frac{1}{p_0}}.$$

故由 Hardy-Littlewood 极大函数 M 的加权有界性可得

$$\|(\partial_t-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} f\|_{L^p(\omega^{1-p})} \leqslant C\|f\|_{L^p(\omega^{1-p})},\ (2q)'\leqslant p<$$

∞.

再由对偶理论可得

$$\| V^{\frac{1}{2}}(\partial_t-\Delta+V)^{-\frac{1}{2}}f\|_{L^p(\omega)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\omega)},1<p\leqslant 2q.$$

参考文献

[1]E. Stein, Harmonic Analysis Real-variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals[M], Princeton Univ Press. 1993.

[2]B. Helffer and J. Nourrigat, Uneinégalité L^2. (Unpublished manuscript)

[3]H. F. Smith, Parametrix Construction for a Class of Subelliptic Differential Operators[J], Duke Math Journal 63(2)(1991): 343-354.

[4]S. Thangavelu, Reisz Transforms and the Wave Equation for the Hermite Operators[J], Commin P. D. E. 15(8)(1990): 1199-1215.

[5]J. Zhong, Harmonic Analysis for Schrödinger Type Operators[D], Princeton University: Princeton University, 1993.

[6]J. Zhong, The Sobolev estimates for some Schrödinger type operators[J], Math. Sci. Res. Hot-line 3(1999), 1-48.

[7]Z. Shen, L^p Estimates for Schrödinger Operartors With Certain Potentials[J], Ann Inst Fourier Grenoble 45(2)(1995): 513-546.

[8]J. Dziubaöski, Atomic decomposition of H^p spaces associated with Schrödinger operators[J], Indiana Univ. Math. J. 47(1998): 75-98.

[9]J. Dziubaöski, J. Zienkiewicz, Hardy space H^1 associated to Schrödinger operators with potential satisfying reverse Hölder inequality[J]. Res. Math. Iberoam 15(2)(1999): 279-296.

[10]J. Dziubański, J. Zienkiewicz, H^p spaces for Schrödinger operators Fourier Analysis and Related Topics[J], Banach Center Publications. 56(2002): 45-53.

[11]J. Dziubański, J. Zienkiewicz, H^p spaces associated with Schrödinger operators with potentials from reverse Hölder class

[J], Colloq. Math. 98(2003): 5-38.

[12]J. Dziubański, G. Garrigós and T. Martínezs ets. J. Torrea and J. Zienkiewicz, *BMO* spaces related to Schröodinger operators with potentials satisfying a reverse Höolder inequality[J], Math. Z. 249(2005): 329-356.

[13]T. Martínezs, Extremal Spaces Related to Schrödinger Operators with Potentials Satisfying a Reverse HölderInequality[J], Revisa DeLa Unnion Math Argentina 45(1)(2004): 43-61.

[14]X. Duong and L. Yan, Duality of Hardy and *BMO* spaces associated with operator with heat kernels, J. Amer. Math. soc. 18 (2005): 943-973.

[15]X. Duong and L. Yan, New function spaces of *BMO* type, the John-Nirenberg inequality, interpolation and applications [J], Comm. Pure Appl. Math. 58(2005): 1375-1420.

[16]X. Duong, L. Yan, Duality of Hardy and *BMO* spaces associated with operators with heat kernels[J], Journal of Amer. Math. Soc. 18(2005): 943-973.

[17]X. Duong and A. McIntosh, Singular integral operators with nonsmooth kernels on irregular domains[J], Rev. Mat. Iberoamericana 15(1999): 233-265.

[18]X. Duong, E. Ouhabaz and L. X. Yan, Endpoint estimates for Riesz transforms of magnetic Schrödinger operators[J], to appear, Arkiv för Matematik(2006).

[19]D. Deng, X. Duong, A. Sikora and L. X. Yan, Comparison of the classical *BMO* with the *BMO* spaces associated with operators and applications(appear), Arkiv för Matematik(2006).

[20]C. Lin, H. Liu, The *BMO*-type space BMO_L associated with Schrödinger operator on the Heisenberg group[J], Adv. Math. 228(2011): 1631-1688.

[21]J. Dong, H. Liu, The BMO_L space and Riesz transforms associated

with Schrödinger operators[J], Acta Math. Sini. (Engl. Ser.) 26 (10)(2010):1827-1838.

[22]D. Yang, Do Yang, Y. Zhou, Local *BMO* and *BLO* spaces on RD-spaces and applications to Schrödinger operators[J], Commun Pure Appl Anal. 9(3)(2010):779-812.

[23]D. Yang, Do Yang, Y. Zhou, Endpoint properties of localized Riesz transforms and fractional integrals associated to Schrödinger operators[J], Potential Anal. 30(2009):271-300.

[24]Y. Jiang, Spaces of Type *BLO* for Non-doubling Measures[J], Proc. Amer. Math. Soc. 133(2005):2101-2107.

[25]L. Tang, *BLO* spaces associatied with the sections[J], Proc. Amer. Math. Soc. 135(2007):2423-2432.

[26]W. Gao, Y. Jiang and L. Tang, Space of *BLO* Type Associated with Schrödinger Operator[J], Acta Math. Sinica (Chinese Series) 52(6)(2009):1101-1110.

[27]W. Gao, Y. Jiang, Weighted *BLO* Estimates for Maximal Operators, Advances in Math. (China) 20(4)(2011):441-446.

[28]Z. Guo, P. Li, L. Peng, L^p Boundedness of Commutators of Riesz Transforms Associated to Schrödinger Operator[J], J. Math. Anal. Appl. 341(1)(2008):421-432.

[29]P. Li, L. Peng, Endpoint estimates for commutators of Riesz transform associated with Schrodinger operators[J], Bull. Austr. Math. Soc., 2010(82):367-389.

[30]S. Jenson, Mean Osillation and Commutators of Singular Integral Operators[J], Ark. Math. 16(1978):263-270.

[31]M. Paluszyński, Characterization of the Besov spaces via the commutator operator of Coifman, Rochberg and Weiss[J], Indiana univ. Math. J. 44(1995):1-17.

[32]B. Hu, J. Gu, Necessary and sufficient condition for boundedness of some commutators with weighted Lipschitz functions[J], J.

Math. Anal. Appl. 340(1)(2008):598-605.

[33]C. Bennett, R. DeVore and R. Sharpley, Weak-L^∞ and *BMO*[J], Annals of Mathematics 113(1981):601-611.

[34]R. Coifman and R. Rochberg, Another Characterization of *BMO*, Proc. Amer. Math. Soc. [J]79(1980):249-254.

[35]C. Bennett, Another Characterization of *BLO*[J], Proc Amer Math Soc. [J]85(1982):552-556.

[36]O. Winston, The Natural Maximal Operatoron *BMO*[J], Proc. Amer. Math. Soc. 129(2001):2919-2921.

[37]G. Hu, Q. Zang, A *BLO* Estimate for Maximal Singular Integral Operator[J], Advance Matnematics(China) 36(1)(2007):101-107.

[38]W. Gao and Y. Jiang, L^p Estimate for Parabolic Schrödinger Operator with Certain Potentials[J], J. Math. Anal. Appl. 310 (2005):128-143.

[39]L. Tang and J. Han, L^p Boundedness of Parabolic Schrödinger Type Operartors With Certain Nonnegative Potentials, Forum Mathematicum23(1)(2011):161 - 179.

[40]A. Carbonaro, G. Metafune, C. Spina, Parabolic Schrödinger operators[J], J. Math. Anal. Appl. 343(2008):965-974.

[41]L. Tang, L^p Estimates for Parabolic Magnetic Schrödinger Operartors[J], Forum Mathematicum 22(2)(2010):203-220.

[42]K. Kurata, S. Sugano, A remark on estimates for uniformly elliptic opetators on weighted L^p spaces and Morrey spaces[J], Math. Nachr. 209(2000):137-150.

[43]Y. Zhu, L^p estimates for Riesz transforms associated to Schrödinger operators[J], J Mathematical Research and Exposition 24(2)(2005):231-238.

[44]K. Kurata, An Estimate on the Heat Kernel of Magnetic Schrödinger Operators and Uniformly Elliptic Operators With

Non-negative Potentials[J],J London Math. Soc. 62(2000):885-903.

[45]F. Gehring,The L^p-integrability of the Partial Derivatives of a Quasi-conformal Mapping[J]. Acta Math. 130(1973):265-277.

[46]B. Muckenhoupt,Weighted norm inequality for Hardy maximal function[J],Trans. Amer. Math. Soc. 165(1972):207-226.

[47]Z. Shen,On the Neumann Problem for Schrödinger Operartor in Lipschitz Domains[J],Indiana Univ. Math. J. 43(1)(1994):143-176.

[48]C. Fefferman,The uncertainty princeple[J],Bull,Amer. Math. Soc. (N. S.)9(1983):129-206.

[49]E. B. Fabes and N. Riviere,Singular Integrals with Mixed Homogeneity[J],Studia Mathematica 27(1966):19-38.

[50]Avner. Friedman,Partial Differential Equations of Parabolic Type [M],1964 by Prentice-Hall. INC. Englewood Cliff. N. J.

[51]C. Tang,B. Ma,Boundedness of Commutators of Singular Integral Operators Satisfying Condition H(m)[J],Acta Mathematica Sinica,Chinese Series 53(2)(2010):243-250.

[52]C. Fefferman and E. M. Stein,H^p spaces of several variables[J], Acta. Math. 129(1972):137-193.

[53]J. García-Cuerva,J. L. Rubio,Weighted Norm Inequalities and Related Topics[M],North-Holl and Amsterdam. 1985.

[54]R. Coifman-G. Weiss,Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains Espaces Homogènes[R],Lecture Notesin Mathematics, n. 242. Springer-Verlag. Berlin-Heideberg-NewYork, 1971.

[55]M. Bramanti,M. C. Cerutti,Commutators of singular integrals on homogeneous spaces[J],Boll Unione Math Ital(Ser. B)10(3)(1996):843-883.

[56]G. Pradolini,O. Salinas,S. Fe,Commutators of singular integrals

on homogeneouss paces[J], Czechoslovak Math J. 57(132) (2007):75-93.

[57]J. García-Cuerva, Weighted H^p Spaces[D], Dissert. Math. 1979, 162.

[58]M. Bramanti and M. C. Cerutti, $W_p^{1,2}$ Solvability for the Cauchy-Dirichlet Problem for Parabolic Equations with *VMO* Coefficients [J], Commun Partial Differential Equations 18(9&10)(1993): 1735-1763.

[59]Y. Chen, The Boundedness of Parabolic Singular Integrals and Its Commutators[D], Ph. D. Thesis. Beijing Normal University, 2007.

[60]R. R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss, Fractorization theorems for Hardy spaces in several variables[J], Ann of Math. 103(2) (1976):611-635.

[61]R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis[J], Bull. Amer. Math. Soc. 83(1977):569-645.

[62]C. Segovia, J. L. Torrea, Higer order commutators for Vector-valued Calderón-Zygmundopoerators[J], Trans. Amer. Math. Soc. 366(1993):537-556.

[63]W. Gao, W. Zhou, Weighted Boundedness of Commutators of Riesz Transforms Associated with Schrodinger Operator[J], Applied Mechanics and Materials 256-259(2013):2939-2942.

[64]P. Auscher and E. Russ, Hardy spaces and divergence operators on strongly Lipschitzdomain of R^n [J], J. Funct. Anal. 201 (2003):148-184.

[65]P. Auscher, E. Russ and P. Tchamitchian, Hardy Sobolev spaces on strongly Lipschitz domain of R^n [J], J. Funct. Anal. 205 (2005):54-109.

[66]P. Auscher and P. Tchamitchian, Square root problem for divergence operators and related topics[M], Asterisque, 249, Soc.

Math. France,1998.

[67]P. Auscher,X. T. Duong and A. McIntosh,Boundedness of Banach space valued singular integral operators and Hardy spaces [J],preprint,2004.

[68]M. Christ. L^p bounds for spectral multipliers on nilpotent groups [J],Trans. Amer. Math. Soc. 328(1991):73-81.

[69]L. Yu,Weighted L^p boundedness of commutators of Schrödinger type operartors[J],acta mathematica sinica,Chinese Series 52(6)(2009):1091-1100.

[70] L. Yu, Commutators of *BMO* functions and degenerae Schrödinger operartors with certain nonnegative potentials[J], Monatsh Math. ,No. 1(2012):41-56.

[General Information]
书名=反霍尔德类势的薛定谔算子
作者=高文华著
页数=106
SS号=96029764
DX号=
出版日期=2013.08
出版社=天津科学技术出版社